



Modélisation et simulation des connexions intra et inter systèmes électroniques

Nadia Iassamen

► To cite this version:

Nadia Iassamen. Modélisation et simulation des connexions intra et inter systèmes électroniques. Autre. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2013. Français. NNT : 2013BRES0030 . tel-00965131

HAL Id: tel-00965131

<https://theses.hal.science/tel-00965131>

Submitted on 24 Mar 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne

pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

Mention : STIC
École Doctorale SICMA

Présentée par

Nadia IASSAMEN

Préparée au Laboratoire
CNRS Lab-STICC

Modélisation et simulation des connexions intra et inter systèmes électroniques

Thèse soutenue le 3 décembre 2013
devant le jury composé de :

M. CASTANIE Francis

Professeur des Universités, Institut National
Polytechnique, TOULOUSE / Rapporteur

Mme CLOASTRE Pascale

Maître de Conférences, Université de Bretagne
Occidentale, BREST / Co-encadrante

M. FLECHET Bernard

Professeur des Universités, Université de Savoie,
LE BOURGET DU LAC / Président du jury

M. MALTI Rachid

Maître de Conférences, HDR, Université de
Bordeaux 1, TALENCE / Rapporteur

M. TANGUY Noël

Professeur des Universités, Université de Bretagne
Occidentale, BREST / Directeur de thèse

M. TELESU Mihai

Maître de Conférences, Université de Bretagne
Occidentale, BREST / Invité

Remerciements

Ce travail a été réalisé au laboratoire des sciences techniques de l'information, de la communication et de la connaissance (Lab-STICC UMR CNRS) à l'Université de Bretagne Occidentale (UBO).

Tout d'abord j'adresse mes plus vifs remerciements et ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse monsieur Noël TANGUY, Professeur à l'Université de Bretagne Occidentale (UBO) à BREST qui m'a offert l'opportunité de faire cette thèse, pour son encadrement, ses conseils, son soutien et sa patience.

Je remercie bien chaleureusement madame Pascale Cloastre maîtres de conférences à l'UBO d'avoir co-encadré ce travail de thèse, pour ses conseils avisés qui m'ont permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions.

Je remercie également Mihai TELESCU maître de conférences à l'UBO pour ses connaissances en théorie des circuits m'ont été d'un réel soutien.

J'adresse mes sincères remerciements à monsieur Bernard FLECHET, professeur à l'université de Savoie, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de thèse. Je voudrais encore remercier monsieur Francis CASTANIE, professeur des universités, à l'institut national polytechnique de TOULOUSE, et monsieur Rachid MALTI maître de conférences, HDR, à université de Bordeaux 1, TALENCE pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs de ce travail de thèse. Leurs suggestions m'ont été très utiles pour améliorer la qualité de mon mémoire de thèse.

Je ne saurais oublier les autres membres du laboratoire, enseignants, secrétaires, techniciens doctorants et ex-doctorants qui, à divers titres et dans divers circonstances m'ont apporté leur aide et leur soutien, et grâce auxquels l'ambiance a toujours été amicale et agréable.

Je remercie la région de Bretagne d'avoir financée ma thèse. Sans ce financement ces travaux n'auraient pas pu se réaliser.

Mes pensées iront surtout vers mes parents qui m'ont permis de poursuivre mes études jusqu'à aujourd'hui. Merci à toute ma famille, et ma belle-famille, qui ont toujours eu confiance en moi et m'ont soutenu pendant toutes ces années.

Je remercie du fond du cœur mon mari Omar qui m'a supporté et soutenu pendant la thèse et particulièrement la rédaction Je dédie finalement ce travail à mes filles Sarah et Inès nées durant ces années de thèse.

Sommaire

Sommaire.....	5
Liste des Figures.....	8
Liste des Tableaux	11
Glossaire.....	12
Introduction générale.....	15
Chapitre I : Interconnexions intra et inter systèmes électroniques : problématique et modélisation	19
I.1. Introduction.....	21
I.2. Evolution technologique des circuits intégrés : contexte général, évolution et tendances	21
I.3 Problématique des réseaux d'interconnexions.....	23
I.3.1 Evolution technologique des réseaux d'interconnexions.....	23
I.3.2. Les problèmes électriques liés aux interconnexions	24
I.4. Objectif des travaux de recherche.....	26
I.5. Modélisation des interconnexions.....	28
I.5.1. Les équations de Maxwell.....	28
I.5.2. Equations des télégraphistes	29
I.5.3. Modélisation 3D (extraction de paramètres RLCG)	35
I.5.4. Modélisation PEEC.....	35
I.5.5. Bilan sur les modèles classiques d'interconnexion.....	36
I.6. Réduction d'ordre des modèles d'interconnexion	36
I.6.1. Méthodes utilisant des représentations d'état	37
• Modèle de ligne d'interconnexion RLC	38
• Réduction par projection sur un sous-espace de Krylov	39
• Autres techniques	41
I.6.2. Méthode utilisant des mesures en fréquence.....	41
I.7. Travaux antérieurs menés au Lab-STICC.....	42
I.8. Méthode développée durant ce travail de thèse	43
I.8. Conclusion	44
Chapitre II : Approximation rationnelle à l'aide de fonctions orthogonales	45
II.1. Introduction	47
II.2. Définition des fonctions de Müntz-Laguerre.....	48
II.2.1. Cas particulier : les fonctions de Laguerre	50
II.3. Définition des fonctions de Kautz	50
II.4. Propriétés	51
II.4.2. Représentations temporelle et fréquentielle des fonctions de Kautz	53
II.5. Représentation sur la base des fonctions de Müntz-Laguerre	55
II.5.1. Détermination des spectres de Müntz-Laguerre	56
II.6. Représentation sur la base des fonctions de Kautz	59

II.6.1. Détermination des spectres de Kautz	59
II.7. Exemples de modélisation	60
II.7.1. Exemple d'un câble sous-marin	60
II.7.2. Exemple d'un circuit à ligne RC	62
II.7.3. Exemple d'une ligne de transmission	64
II.8. Conclusion	66
Chapitre III : Réduction d'ordre	67
III.1. Introduction	69
III.2. Méthodes de réduction d'ordre	70
III.2.1. Formulation du problème de réduction	70
III.2.2. Méthodes antérieures	70
III.2.3. Méthode de réduction développée durant la thèse	74
III.3. Méthode de réduction utilisant les fonctions de Müntz-Laguerre (MLOR)	74
III.3.1. Construction d'un ensemble de fonctions relatives à $\hat{f}(s)$	75
III.3.2. Construction du modèle réduit	77
III.3.3. Optimisation des coefficients q_k	78
III.3.4. Calcul du spectre des fonctions $\hat{f}_k(s)$	79
III.4. Méthode de réduction utilisant les fonctions de Kautz (KOR)	82
III.4.1. Construction d'un ensemble de fonctions relatives à $\hat{f}(s)$	82
III.4.2. Construction du modèle réduit	83
III.4.3. Optimisation des coefficients q_k	84
III.4.4. Calcul du spectre des fonctions $\hat{g}_k(s)$	85
III.5. Quelques exemples académiques d'application de la méthode de réduction	86
III.5.1. Exemple de Lucas	86
III.5.2. Exemple d'un câble sous-marin	92
III.5.3. Exemple de Lepschy	96
III.5.4. Exemple de Spanos	98
III.5.5. Exemple de Hyland	100
III.5.6. Bilan et comparaison	102
III.5.7. Préservation de la stabilité	103
III.6. Extension de la méthode de réduction aux systèmes MIMO	105
III.7. Conclusion	106
Chapitre IV : Mise en œuvre et application	109
IV. Introduction	111
IV.1. Exemple d'une ligne de transmission	111
IV.2. Exemple de 5 lignes couplées	117
IV.3. Exemple d'un réseau RLC en arbre	121
IV.4. Exemple d'un boîtier StratEdge	124
IV.5. Conclusion	126
Conclusion et perspectives	129
Production scientifique	135
Références bibliographiques	137

Annexes 145

Annexe A	Conservation des R premiers coefficients	147
Annexe B	Calcul du spectre des fonctions $\hat{g}_k(s)$	148
Annexe C	Utilisation de ELSID	153

Liste des Figures

Figure I.1 : Assemblage de puces pour une intégration 3D [Fou06]	22
Figure I.2 : Effets des interconnexions sur un signal propagé	24
Figure I.3: Illustration du couplage diaphonique entre 2 interconnexions voisines. La ligne au repos (en bas) est parasitée par la ligne active (en haut)	25
Figure I.4 : Lignes d'interconnexions à différents niveaux	26
Figure I.5 : Démarche de modélisation des interconnexions	27
Figure I.6 : Modèle électrique équivalent d'un tronçon de ligne de transmission	30
Figure I.7 : Modèle électrique de deux lignes d'interconnexions couplées	31
Figure I.8 : Système de N lignes d'interconnexions couplées	32
Figure I.9 : Une ligne modélisée par des cellules RLC	38
Figure I.10 : Schéma des étapes de modélisation et réduction d'ordre	43
Figure II.1 : Filtre associé aux fonctions de Müntz-Laguerre	49
Figure II.2 : Filtre associé aux fonctions de Kautz avec $D_m(s) = s^2 + \sigma_m s + \pi_m$	51
Figures II.3 et II.4 : Module et phase de $\hat{\phi}_1(s)$ à $\hat{\phi}_4(s)$ pour $\vec{\alpha} = \{1; 2\}$	52
Figures II.5 et II.6 : Module et phase de $\hat{\phi}_1(s)$ à $\hat{\phi}_4(s)$ pour $\vec{\alpha} = \{1 \pm 5i\}$	52
Figures II.7 et II.8 : $\psi_m(r)$ pour $\vec{\alpha} = \{1; 2\}$ (m=1, 3 ou 5 et m=2, 4 ou 6)	53
Figures II.9 et II.10 : $\psi_m(r)$ pour $\vec{\alpha} = \{1 \pm 5i\}$ (m=1, 3 ou 5 et m=2, 4 ou 6)	53
Figures II.11 et II.12 : Module et phase de $\hat{\psi}_1(s)$ à $\hat{\psi}_4(s)$ pour $\vec{\alpha} = \{1; 2\}$	54
Figures II.13 et II.14: Module et phase de $\hat{\psi}_1(s)$ à $\hat{\psi}_4(s)$ pour $\vec{\alpha} = \{1 \pm 5i\}$	54
Figure II.15 : Module de $\hat{\psi}_1(s)$ pour différents jeux de pôles réels ou complexes conjugués	55
Figure II.16 : Module de $\hat{\psi}_2(s)$ pour différents jeux de pôles réels ou complexes conjugués	55
Figures II. 17 et II.18 : Réponses fréquentielles (module et phase) de $\hat{f}(s)$ et de son modèle de Müntz-Laguerre	61
Figures II.19 et II.20 : Réponses fréquentielles (module et phase) de $\hat{f}(s)$ et de son modèle de Kautz	61
Figure II.21 : Réponse impulsionnelle $f(r)$ et son modèle de Kautz approché $g(r)$	62
Figure II.22 : Schéma d'un circuit RC distribué	62
Figures II.23 et II.24 : Réponses fréquentielles (modules et phases) de $\hat{f}(s)$ et de son modèle de Kautz	63
Figures II.25 et II.26 : Réponses fréquentielles (module et phase) de $\hat{f}(s)$ et de son modèle de Müntz-Laguerre	63
Figure II.27 : Ligne d'interconnexion avec une charge capacitive	64
Figures II.28 et II.29 : Réponses fréquentielles (modules et phases) de $\hat{f}(s)$ et de son modèle de Kautz	65
Figures II.30 et II.31 : Réponses fréquentielles (module et phase) de $\hat{f}(s)$ et de son modèle de Müntz-Laguerre	65
Figure III.1 : Principe de construction de l'ensemble Ω_R	73
Figure III.2 : Schéma complet de l'algorithme mis en œuvre montrant le principe d'itération de la méthode	81
Figure III.3 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle MLOR d'ordre 4	87
Figure III.4 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle KOR d'ordre 4	88

Figure III.5 : Courbe de l'erreur via KOR avec $R=4$, sur 10 itérations.....	89
Figure III.6 : Courbe des 10 premiers coefficients	91
Figure III.7 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle MLOR d'ordre 6.....	93
Figure III.8 : Réponse impulsionnelle $f(t)$ et son modèle KOR approché $g(t)$	93
Figure III.9 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle KOR d'ordre 6....	94
Figure III.10 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle MLOR d'ordre 4	97
Figure III.11 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle KOR à l'ordre 4	97
Figure III.12 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle MLOR à l'ordre 2	99
Figure III.13 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle KOR à l'ordre 2	100
Figure III.15 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle KOR à l'ordre 2	102
Figure III.16 : Les différents paramètres de réduction pour la méthode MLOR	104
Figure III.17 : Pôles des modèles réduits sur 1000 tests via la méthode MLOR	104
Figure III.18 : Système de N lignes couplées.....	105
Figure IV.1 : Ligne d'interconnexion avec une charge capacitive	111
Figure IV.2 : Module et phase du système original et de son modèle de Kautz pour $N=50$	112
Figure IV.4 : Module et phase du système original et de son modèle de Kautz pour $N=300$	113
Figure IV.5 : Module et phase du système original et de son modèle de Kautz pour $N=600$	113
Figure IV.6 : Réponse fréquentielle du système original et du modèle réduit pour $l=0,5mm$	114
Figure IV.7 : Réponse fréquentielle du système original et du modèle réduit pour $l=1mm$	114
Figure IV.8 : Réponse fréquentielle du système original et du modèle réduit pour $l=1,5mm$	115
Figure IV.9 : Réponse fréquentielle du système original et du modèle réduit pour $l=2mm$	115
Figure IV.10 : Réponses impulsionnelles du système original et du modèle réduit, $l=2mm$	116
Figure IV.11 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle réduit $l=2mm$	117
Figure IV.12 : Système de 5 lignes couplées	117
Figure IV.13.a : Comparaison entre le module et la phase de l'élément Y_{11} du système de cinq lignes couplées et ceux de son modèle réduit équivalent.	119
Figure IV.13.b : Comparaison entre le module et la phase de l'élément Y_{27} du système de cinq lignes couplées et ceux de son modèle réduit équivalent.	119
Figure IV.13.c : Comparaison entre le module et la phase de l'élément Y_{32} du système de cinq lignes couplées et ceux de son modèle réduit équivalent.	120
Figure IV.13.d : Comparaison entre le module et la phase de l'élément $Y_{5,10}$ du système de cinq lignes couplées et ceux de son modèle réduit équivalent.	120
Figure IV.14 : Réseau d'interconnexions en arbre	121
Figure IV.15.a : Comparaison entre le module et la phase de l'élément Y_{11} du réseau d'interconnexions en arbre et ceux de son modèle réduit équivalent.	122

Figure IV.15.b : Comparaison entre le module et la phase de l'élément Y_{61} du réseau d'interconnexions en arbre et ceux de son modèle réduit équivalent.	122
Figure IV.15.c : Comparaison entre le module et la phase de l'élément Y_{24} du réseau d'interconnexions en arbre et ceux de son modèle réduit équivalent.	123
Figure IV.15.d : Comparaison entre le module et la phase de l'élément Y_{56} du réseau d'interconnexions en arbre et ceux de son modèle réduit équivalent.	123
Figure IV.16 : Boîtier StratEdge	124
Figure IV.17 : Dimensions du boîtier StratEdge	124
Figure IV.18.a : Comparaison entre le module et la phase de l'élément S_{12} du boîtier StratEdge et ceux de son modèle réduit équivalent.	125
Figure IV.18.b : Comparaison entre le module et la phase de l'élément S_{14} du boîtier StratEdge et ceux de son modèle réduit équivalent.	125
Figure IV. 18.c : Comparaison entre le module et la phase de l'élément S_{45} du boîtier StratEdge et ceux de son modèle réduit équivalent.	126
Figure IV. 18.d : Comparaison entre le module et la phase de l'élément S_{66} du boîtier StratEdge et ceux de son modèle réduit équivalent.	126

Liste des Tableaux

Tableau I.1: Prévisions technologiques sur l'évolution des paramètres importants des circuits intégrés [ITRS01]-[ITRS07]	22
Tableau I.2 : Évolution technologique des principaux paramètres d'interconnexion [ITRS01]-[ITRS07]	23
Tableau II.1 : Erreurs quadratiques relatives estimées pour différentes valeur de N	64
Tableau II.2 : Erreurs quadratiques relatives estimées pour différentes valeur de N	66
Tableau III.1 : Erreurs quadratiques relatives obtenues pour les modèles MLOR et KOR sur 10 itérations.....	89
Tableau III.2. Convergence des pôles pour différents jeux de paramètre via KOR	90
Tableau III.3 : Convergence de l'erreur pour différents jeux de paramètres via KOR.....	90
Tableau III.4 : Valeurs des 10 premiers coefficients du modèle de Kautz	92
Tableau III.5 : Erreurs quadratiques relatives obtenues pour différents modèles réduits d'ordre 6	94
Tableau III.6 : Convergence des pôles au bout de 3 itérations pour différents jeux de paramètres	95
Tableau III.7 : Convergence des pôles au bout de 3 ou 4 itérations pour différents jeux de paramètres	96
Tableau III.8 : Erreurs quadratiques relatives obtenues pour les modèles MLOR et KOR sur 10 itérations.....	98
Tableau III.9 : Erreurs quadratiques relatives de modèles obtenus par différentes techniques .	103
Tableau IV.1 : Erreurs quadratiques relatives obtenues pour différentes valeur de N	113
Tableau IV.2 : Erreurs quadratiques relatives obtenues pour différentes longueurs de la ligne	115
Tableau IV.3 : Erreurs quadratiques relatives obtenues pour différents ordre R $l = 2\text{ mm}$	116

Glossaire

Afin de faciliter la lecture de ce mémoire, nous donnons dans ce glossaire différentes abréviations et notations utilisées tout au long du rapport.

ITRS	International Technologie Roadmap for Semiconductors
I/O	Input/Output
LEST	Laboratoire d'Electronique et Systèmes de Télécommunications
MIMO	Multi-Input-Multi-Output
MOR	Model Order Reduction
RLGC	Resistor-inductor-conductor-capacitor network
PCB	Printed Circuit Board
PEEC	Partial Element Equivalent Circuit
RLC	Resistor-inductor-capacitor network
SPICE	Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis
SISO	Single-Input- Single-Output
VLSI	Very Large Scale Integration

Notations

$f(t)$	Fonction à temps continu
$\hat{f}(s)$	Transformée de Laplace d'une fonction à temps continu
$\langle f, g \rangle$	Produit scalaire de fonctions à temps continu
$L^2([0, \infty))$	Espace de fonctions complexes d'énergie finie sur l'intervalle $[0, \infty]$
$\hat{\psi}(s)$ continu	Transformée de Laplace des fonctions de Kautz multipôles à temps continu
$\hat{\phi}(s)$	Transformée de Laplace des fonctions de Laguerre à temps continu
$\hat{\phi}(s)$ continu	Transformée de Laplace des fonctions de Muntz-Laguerre à temps continu
α	Paramètre des fonctions de Laguerre à temps continu
α_n	Paramètres des fonctions de Muntz-Laguerre à temps continu
$\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}$	Paramètres des fonctions de Kautz multipôles à temps continu
σ_n, π_n	Paramètres des fonctions de Kautz multipôles $\sigma_n = \alpha_{2n-1} + \alpha_{2n}$ et $\pi_n = \alpha_{2n-1} \cdot \alpha_{2n}$

c_n	Coefficients d'un spectre (de Laguerre, de Kautz, etc.)
k, l, m, n, u	Indices entiers
N	Nombre total de coefficients d'un spectre
M	Nombre de coefficients d'indice pair ou d'indice impair total pour Kautz $N = 2M$
Λ_α	Opérateur de réduction
$\hat{h}(s)$	Transformée de Laplace de la fonction du modèle réduit à temps continu
$P(s)$	Numérateur du modèle réduit
$Q(s)$	Dénominateur du modèle réduit
R	Ordre du modèle réduit $R = 2r$
Γ	Matrice de Gram
$\gamma_{i,j}$	Eléments de la matrice de Gram
Ω	Ensemble de fonctions
T	Transposé
Eq	Erreur quadratique
Eqr	Erreur quadratique relative
j	Unité imaginaire $j^2 = -1$
η	Facteur d'échelle de normalisation de la fréquence

Paramètres électriques

$[Y]$	Matrice admittance d'un circuit électrique
$[Z]$	Matrice impédance d'un circuit électrique
$[S]$	Matrice des paramètres S
i	Courant électrique
V	Tension
R	Résistance linéique du câble (Ω/m)
G	Conductance linéique (S/m)
L	Inductance linéique du câble (H/m)
C	Capacité linéique du câble (F/m)
Y	Contribution parallèle des paramètres linéiques $Y = Cs + G$
Z	Contribution série des paramètres linéiques $Z = Ls + R$

Introduction générale

Téléphones portables, tablettes,... les appareils électroniques connectés et communicants envahissent notre quotidien. Le marché des systèmes électroniques a connu un essor technologique et commercial fulgurant ces dernières années. En effet, depuis l'invention du transistor, le secteur des technologies est engagé dans une course à la performance : composants et systèmes plus rapides, plus petits, moins énergivores, moins chers, ... Ces performances accrues sont nécessaires afin de répondre aux attentes des consommateurs toujours plus exigeants en terme de fonctionnalités. Afin d'affronter une concurrence toujours plus féroce, les constructeurs sont contraints notamment de réduire les temps de conception pour être les premiers à proposer de nouveaux produits sur le marché.

Le nombre de composants par circuit est passé, de manière très régulière, de quelques composants à la fin des années 50 à plusieurs millions aujourd'hui. L'évolution technologique vise toujours à augmenter la densité d'intégration et réduire les dimensions des transistors en utilisant de nouveaux concepts architecturaux : system on chip (SoC), system in package (SiP). On parle notamment d'intégration hétérogène dont un procédé majeur consiste à empiler des puces de différentes natures telles que circuits numériques, circuits analogiques, circuits de puissance, capteurs, composants RF, diodes, etc. en utilisant de courtes interconnexions verticales. Une des conséquences de cette évolution est la complexité toujours croissante des circuits fabriqués. Le nombre de composants dans une seule puce augmente de jour en jour. Cette augmentation est déterminée conformément à la loi de Moore (doublement de transistors dans les circuits intégrés tous les deux ans depuis trente ans). Dans le même temps, la densité des connexions reliant transistors, composants, dispositifs augmente également proportionnellement.

Les technologies numériques fonctionnent aujourd'hui à des fréquences de l'ordre du gigahertz (GHz). Cela induit des effets parasites non négligeables liés aux interconnexions : retards, problèmes de synchronisation, couplage et problèmes d'intégrité du signal pouvant être critiques pour les performances des systèmes. En conséquence, un circuit électronique peut ne pas répondre aux exigences nécessaires ou même ne pas fonctionner. Sachant que l'amélioration de produits dans la phase de conception est coûteuse, la prédiction exacte de ces effets est une nécessité pour les conceptions en hautes fréquences, d'où l'importance pour les concepteurs de pouvoir simuler le système en tenant compte de manière précise des interconnexions.

Pour être en mesure d'effectuer des simulations précises et à moindre coût, il devient nécessaire d'approcher chaque interconnexion ou réseau d'interconnexions, par un modèle de faible complexité mais ayant un comportement similaire. La caractérisation des réseaux d'interconnexions fournit généralement des modèles électriques d'une très grande complexité. Une illustration en est donnée avec la modélisation PEEC (*Partial Element Equivalent Circuit*) qui consiste à représenter chaque tronçon de ligne de longueur élémentaire par un circuit équivalent (résistance, self, capacité, conductance) ; la complexité du modèle électrique complet croît alors très rapidement avec la longueur de la ligne modélisée. La simulation temporelle de tels modèles électriques est très gourmande en temps de calcul, ce qui impacte la durée globale de conception. Le remplacement de ces modèles électriques par des modèles plus simples s'avère alors nécessaire. Les outils employés sont des outils de réduction d'ordre des modèles. La réduction d'ordre d'un modèle consiste à remplacer un modèle initial par un autre plus simple mais décrivant assez précisément certains aspects importants du modèle original : sa dynamique, les retards, les temps de montée et de descente,... Il doit conserver également certaines propriétés intrinsèques des systèmes d'interconnexions comme la stabilité ou la passivité. L'intérêt d'un modèle compact et réduit est de permettre au concepteur de faire des simulations temporelles rapides pour vérifier l'intégrité des signaux.

Au cours des dernières années, beaucoup de recherches ont été faites dans le domaine de la réduction d'ordre des modèles. Une grande variété de méthodes est donc déjà disponible. Certaines d'entre elles sont adaptées à des applications spécifiques, d'autres sont plus générales. Leur principe consiste toujours à remplacer un système de grande complexité par un autre nettement plus simple ayant les mêmes caractéristiques fréquentielles et les mêmes réponses temporelles pour des stimuli donnés. Au travers de ce travail de thèse, on désire mettre au point une méthode suffisamment générale, précise et souple d'emploi pour être capable de traiter des systèmes (les réseaux d'interconnexions) représentés par des matrices impédance, admittance ou de paramètres S et caractérisées par des mesures fréquentielles ou des fonctions de transfert (modèles circuits ou équation générale des lignes). Notre stratégie a généralement été de traiter le système d'origine comme une boîte noire et de chercher un modèle équivalent, rationnel, d'ordre faible.

Dans ce mémoire, nous présentons un nouvel outil mathématique de réduction de modèle basé sur l'utilisation de deux types de fonctions orthogonales : les fonctions de Müntz-Laguerre et les fonctions de Kautz. Cet outil réalise un compromis avantageux des méthodes qui sont exposées dans le premier chapitre de ce manuscrit et représente une avancée importante répondant à des problèmes spécifiques tels que la modélisation des systèmes d'ordre élevé ou irrationnels pouvant posséder de fortes résonances.

Le manuscrit est structuré en quatre chapitres.

Le chapitre 1 vise à situer le sujet de recherche. Tout d'abord nous montrons l'importance de la modélisation des interconnexions en illustrant les effets indésirables que la présence des lignes d'interconnexion peut avoir sur le fonctionnement des circuits électroniques. Certaines notions de la théorie des lignes, indispensables pour notre étude, sont rappelées. Par la suite nous listons brièvement les principaux travaux connus dans le domaine de la réduction de modèle.

Le chapitre 2 est consacré à la modélisation des systèmes à l'aide de fonctions orthogonales. Tout d'abord une présentation synthétique des fonctions de Müntz-Laguerre et de Kautz est faite. Ensuite, il est rappelé comment approcher un système original d'ordre élevé par un modèle construit à l'aide de ces fonctions orthogonales. Une procédure efficace de calcul des spectres de Müntz-Laguerre et de Kautz est mise en œuvre. Elle permet la modélisation précise de systèmes définis par des fonctions de transfert ou des mesures fréquentielles. Nous terminons ce chapitre par des exemples pour évaluer la qualité de cette méthode d'approximation.

Le chapitre 3 présente la partie principale de la thèse. Nous exposons en détail le principe de la méthode de réduction des modèles élaborée au cours de ce travail. Différents exemples académiques simples sont traités, les résultats obtenus sont évalués et comparés à ceux donnés par des approches déjà connues.

Le chapitre 4 est dédié à l'application de la méthode. Il contient plusieurs exemples de systèmes multi-entrées, multi-sorties. Les performances de cette technique sont évaluées dans le cas de la modélisation des réseaux d'interconnexion à partir des modèles issus de simulations électromagnétiques.

Enfin nous tirons les conclusions sur les travaux menés durant cette thèse et envisageons quelques perspectives pour de futurs travaux. A la fin du document, des annexes donnent les détails de certaines démonstrations.

Ce travail de thèse a été financé par la région Bretagne dans le cadre du projet MOSIC.

Chapitre I : Interconnexions intra et inter systèmes électroniques : problématique et modélisation

I.1. Introduction

L'objectif de la première partie de ce chapitre est de présenter succinctement l'évolution technologique de la microélectronique, elle nous permet de situer synthétiquement les objectifs de nos travaux.

L'évolution technologique des circuits intégrés se caractérise notamment par une diminution de la taille des transistors (technologie submicronique) et par une densité d'intégration toujours plus importante (nombre de composants sur une même puce). Pour présenter ces évolutions, nous nous basons principalement sur l'évolution des réseaux d'interconnexions dans les circuits intégrés. Nous décrivons ensuite les principaux problèmes technologiques liés à l'intégration et leurs répercussions sur les performances électriques hautes fréquences des interconnexions.

Nous illustrons dans la deuxième partie du présent chapitre l'importance de la modélisation des interconnexions. Une modélisation par une « ligne de transmission », permet de décrire le comportement électrique d'une interconnexion. Nous rappelons certaines notions de base de la théorie des lignes, indispensables pour nos développements ultérieurs.

Dans la troisième partie, nous faisons un état de l'art du domaine de la réduction de modèle qui permet d'obtenir des modèles de faible complexité structurelle et proposons une classification des outils existants.

I.2. Evolution technologique des circuits intégrés : contexte général, évolution et tendances

Depuis la découverte du premier transistor en 1947 par les Américains dans les laboratoires de Bell Labs [Bel51], les industriels de la microélectronique ont toujours eu en main la clé de la réussite : miniaturiser les transistors tout en les produisant massivement et à moindre coût. Ceci constitue un véritable challenge qui permet d'accroître la croissance technique et économique de l'industrie de la microélectronique.

La microélectronique a réellement débuté en 1958, avec la réalisation du premier circuit intégré dans les laboratoires de Texas Instruments [Zha01]. Très rapidement, le nombre de transistors par puce a augmenté. Huit ans plus tard (en 1966), l'accroissement s'est fait de façon exponentielle, par un doublement tous les 18 mois. Ce rythme avait été remarqué par G. Moore, un des fondateurs de Intel, et prédisait que cette tendance continuerait pendant au moins 10 ans (d'où le nom de loi de Moore) [Moo65]. Cette loi de Moore, bien que purement empirique, s'est révélée étonnamment très proche de la réalité puisque le nombre de transistors par microprocesseurs a effectivement doublé tous les 18 mois.

Depuis 1997, la loi de Moore est complétée par une « feuille de route internationale », qui prévoit l'évolution technologique. Ces prévisions, connues sous le nom d'ITRS (*International Technology Roadmap for Semiconductors*), sont acceptées comme une référence par les concepteurs. Le tableau 1.1 regroupe ces prévisions concernant un certain nombre de paramètres importants des circuits intégrés et nous donne un aperçu quantitatif des tendances.

Année d'introduction	2004	2007	2010	2013	2016	2019
Technologie (nm)	90	65	45	32	22	16
Fréquence d'horloge (GHz)	4,2	9,3	15	23	40	62
Densité de transistors des blocs logiques (million/cm ²)	77	154	309	617	1235	2469
Coût par transistor (µcent)	62	22	7,8	2,8	0,97	0,34
Surface de la puce (mm ²)	140	140	140	140	140	140
Tension d'alimentation (V)	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,5

Tableau I.1: Prévisions technologiques sur l'évolution des paramètres importants des circuits intégrés [ITRS01]-[ITRS07]

Le tableau 1.1 montre bien l'augmentation de la fréquence d'horloge et de la densité des transistors tandis que la surface des puces reste constante et que le coût des transistors et leur tension d'alimentation ne cessent de diminuer.

Du fait de l'augmentation de la densité d'intégration et de la réduction des dimensions des transistors, on parle de plus en plus de technologie submicronique. A titre d'exemple, les circuits de type SoC (System on Chip), contiennent des centaines de millions de transistors pour des fréquences de fonctionnement de l'ordre du GHz. Les circuits SoC ont la capacité d'intégrer un très grand nombre d'unités de calcul et de mémoires sur une seule puce. Néanmoins, ces architectures posent de nouveaux défis concernant les interconnexions entre les unités de calcul car, pour les futures générations technologiques, la mise à l'échelle impactera lourdement les performances des interconnexions globales en termes de débit, latence et consommation.

Pour éviter de concevoir une très grande puce 2D intégrant toutes les fonctions nécessaires au circuit, très difficile et coûteuse à réaliser, les fabricants de circuit ont développé ces dernières années, une nouvelle méthode tridimensionnelle d'intégration appelée « intégration 3D ». Le principe de l'intégration 3D des systèmes se base sur un assemblage direct et dans la verticalité de puces pouvant être parfois très hétérogènes, exploitant la dimension verticale pour la connectivité de ces circuits, tel que présenté sur la figure I-1.

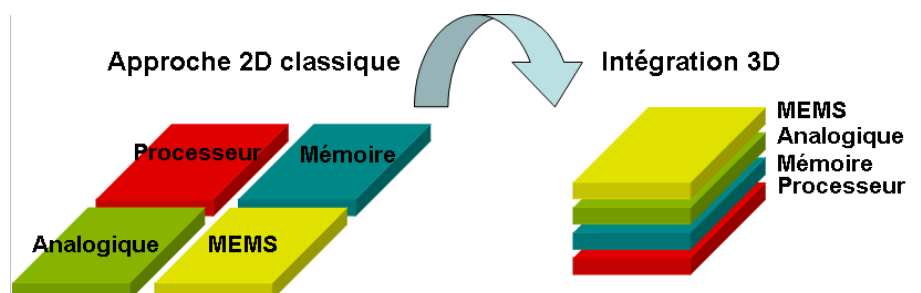


Figure I.1 : Assemblage de puces pour une intégration 3D [Fou06]

Les éléments d'une puce sont reliés par des interconnexions traversant le silicium (intra-puces), ces dernières sont l'élément stratégique de l'intégration 3D et permettront la connexion électrique d'une puce vers les autres et vers l'extérieur (inter-puces).

Parmi les avantages majeurs apportés par l'intégration 3D, on peut citer:

- Une réduction globale des longueurs d'interconnexions (les chemins pour connecter les différentes fonctions sur une puce peuvent être plus directs et éviter l'encombrement lié à la conception 2D)
- L'opportunité d'assembler des puces réalisées séparément et fortement hétérogènes
- Un gain en termes de coût de fabrication et de rendement (un défaut sur une grande puce 2D la condamne au rebut).

A terme, cette approche permet donc une augmentation globale de l'intégration, de la fiabilité (grâce à l'utilisation de puces réalisées avec des technologies matures), de meilleures performances électriques, une baisse de la consommation, un encombrement et des coûts de fabrication réduits.

Cependant, derrière cette évolution spectaculaire se cache une révolution technologique. La réduction des tailles de circuits intégrés entraîne l'apparition de phénomènes liés aux interconnexions et particulièrement difficiles à ignorer.

I.3 Problématique des réseaux d'interconnexions

I.3.1 Evolution technologique des réseaux d'interconnexions

On définit les interconnexions comme un ensemble de composants passifs permettant de relier entre eux des composants plus ou moins éloignés au sein de systèmes électroniques ou de relier les systèmes eux-mêmes. La miniaturisation des transistors impose aux réseaux d'interconnexions une adaptation perpétuelle afin de permettre un bon fonctionnement des puces électroniques. Même si la taille des puces tend à peu varier, la forte croissance de densité des transistors nécessite un réseau d'interconnexions de plus en plus complexe : plus de connexions, des lignes plus longues ainsi qu'un nombre de niveaux de métallisation qui augmente. Le tableau 1.2 résume l'évolution de certains paramètres du réseau d'interconnexions pour différentes générations technologiques.

Année	2004	2007	2010	2013	2016	2019
Technologie (nm)	90	65	45	32	22	16
Nombre de niveaux de métal	10	11	12	13	13	14
Longueur totale d'une ligne (m/cm²)	688	1439	2222	3125	4545	6250
Pas d'une ligne niveau locale (nm)	214	136	90	64	44	32
Pas d'une ligne niveau intermédiaire (nm)	275	140	90	64	44	32
Pas d'une ligne niveau globale (nm)	410	210	135	96	66	48

Tableau I.2 : Évolution technologique des principaux paramètres d'interconnexion [ITRS01]-[ITRS07]

Après avoir présenté les réseaux d'interconnexions dans les circuits intégrés, nous allons présenter les effets indésirables engendrés par ces interconnexions.

I.3.2. Les problèmes électriques liés aux interconnexions

Les progrès constants en miniaturisation des transistors et l'augmentation des performances sont les tendances principales dans l'évolution des circuits électroniques. Cela va entraîner une augmentation des effets indésirables et nuisibles au fonctionnement des circuits intégrés et avoir des conséquences directes sur l'intégrité des signaux [Deu97].

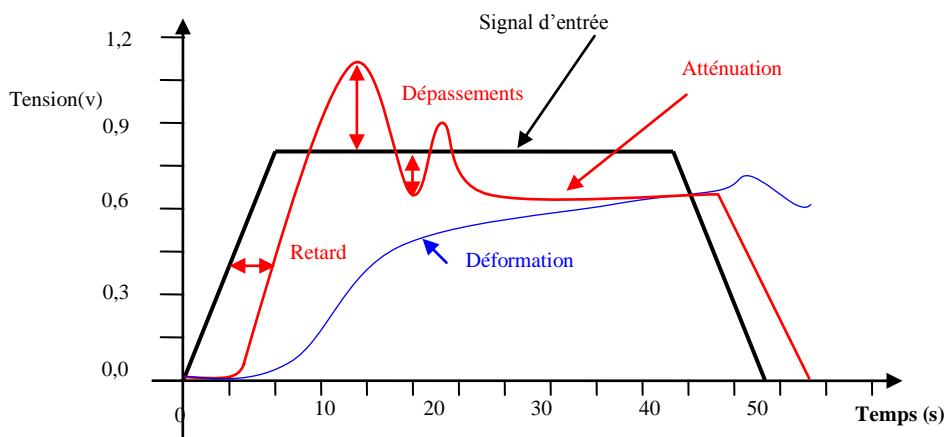


Figure I.2 : Effets des interconnexions sur un signal propagé

Les dégradations du signal dans les interconnexions électriques sont l'un des principaux facteurs limitant la performance des systèmes électroniques à grande vitesse. La figure I.1 illustre de manière graphique certains de ces effets perturbateurs. Parmi ces phénomènes on peut citer :

- **L'atténuation**

L'atténuation est une manifestation générée par les phénomènes de propagation électromagnétique. L'atténuation se manifeste par une diminution de l'amplitude du signal de sortie par rapport à celle du signal d'entrée. Elle augmente en fonction de la fréquence, ce genre de phénomène est très pénalisant pour les circuits digitaux avec des signaux au spectre fréquentiel très élevé.

- **Le retard de propagation**

Le retard de propagation (ou le délai de transmission) introduit par la présence d'une ligne d'interconnexion est un paramètre très important pour les concepteurs. Il constitue un des effets les plus gênants des interconnexions. Il s'agit du temps que met le signal pour se propager d'une porte logique à une autre. Le temps de propagation d'un signal dépend de chaque partie du réseau de transmission (la porte logique, les interconnexions de la puce, le buffer de sortie, le packaging et les interconnexions entre les différents packages). Chaque constituant d'un tel réseau crée un retard supplémentaire dans la transmission du signal.

• La diaphonie

La diaphonie, traduit le couplage électromagnétique provoqué par une ligne active sur une ligne inactive. A cause de la diaphonie, une interconnexion activée par un signal (appelée agresseur) peut venir perturber l'interconnexion voisine au repos logique (appelée victime) [Tan99]. Les couplages diaphoniques se traduisent par l'apparition de tensions parasites sur la ligne agressée et peuvent entraîner par exemple des erreurs logiques, et donc un dysfonctionnement du système comme nous l'illustrons figure I.3.

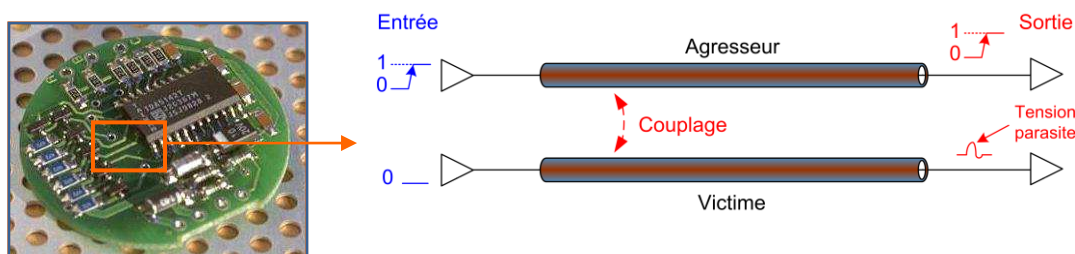


Figure I.3 : Illustration du couplage diaphonique entre 2 interconnexions voisines. La ligne au repos (en bas) est parasitée par la ligne active (en haut)

• Les dépassements

Les dépassements sont plus importants sur les lignes à fort caractère inductif et faible caractère résistif. Ils entraînent une modification de la pente des fronts du signal et potentiellement du retard.

• La déformation

La déformation du signal (à part celle due à la diaphonie) fait que ce dernier n'a pas le temps d'atteindre son niveau maximal. Elle est due au caractère résistif et capacitif de la ligne, les lignes longues entraînant, en général, les déformations les plus importantes. Les concepteurs doivent prendre en compte ces effets dès les premières phases de conception pour assurer le bon fonctionnement de leur circuit.

Les interconnexions intra et inter systèmes électroniques ne peuvent plus actuellement être considérées comme neutres dans un système. Elles peuvent exister à des niveaux variés de la hiérarchie de conception de circuits, comme suggéré par la figure I.4. Elles sont présentes sur les puces, les modules multi – puces MCM (Multi Chip Module), les circuits imprimés PCB (Printed Board Circuit), les systèmes sur puces SOC (System on Chip), les systèmes en boîtier SIP (System in Package), etc....

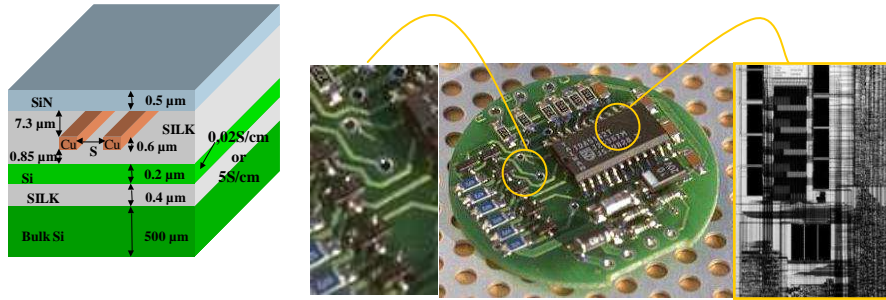


Figure I.4 : Lignes d'interconnexions à différents niveaux

L'ensemble de ces évolutions rend la conception des cartes électroniques de plus en plus complexe, et provoque une apparition croissante des problèmes d'intégrité de signal. Il est donc nécessaire, pour limiter les coûts de production, de mettre en place des méthodologies de travail et d'intégrer l'utilisation d'outils de simulation de façon systématique au cours de la conception.

Afin de diminuer les temps de simulation temporelle permettant de vérifier l'intégrité des signaux, il est nécessaire de développer un outil permettant l'identification et la modélisation d'ordre réduit des lignes d'interconnexion.

I.4. Objectif des travaux de recherche

La modélisation des lignes d'interconnexions présente un grand intérêt pour les industriels et nécessite de toute évidence une double approche sous l'angle des hyperfréquences et sous l'angle de la théorie des circuits et de la microélectronique classique.

La figure I.5 présente de manière schématique les étapes à parcourir dans la modélisation des interconnexions.

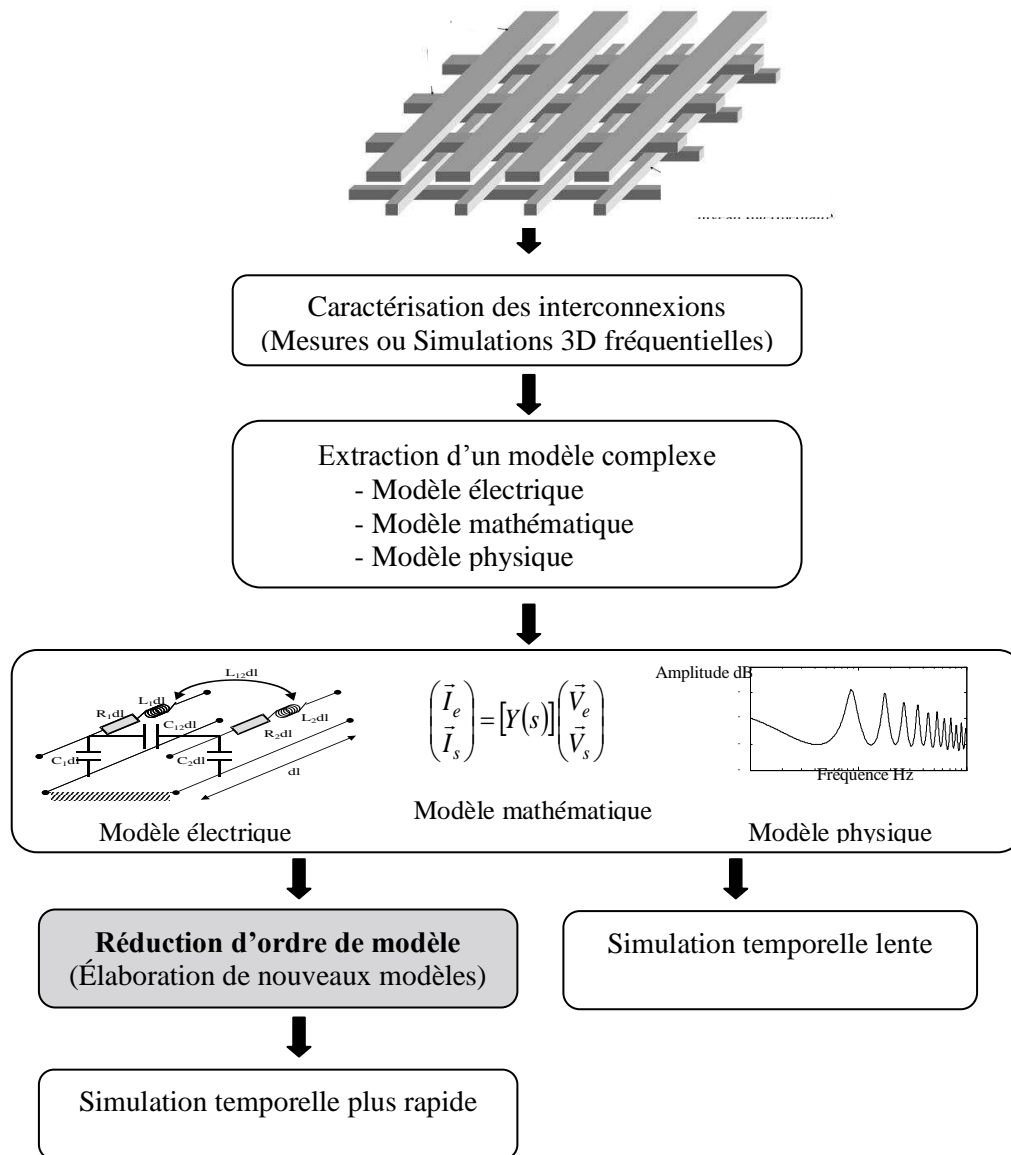


Figure I.5 : Démarche de modélisation des interconnexions

Un réseau de connexions est un système complexe dont les fonctions de transfert dans le domaine de Laplace sont d'ordre infini ou très élevé pour caractériser précisément les phénomènes décrits au paragraphe I.3.2 (diaphonie, retard, atténuation, dépassement, déformation). La simulation temporelle précise des phénomènes induits par les interconnexions peut alors s'avérer difficile. Afin de pouvoir étudier ce genre de structures de connexions complexes, nous avons défini deux phases de traitement à effectuer :

Phase 1- la caractérisation des lignes d'interconnexions. Elle peut être obtenue soit par :

- une modélisation déduite de la résolution des équations des télégraphistes ;
- une modélisation à l'aide de mesures fréquentielles directes ou fournies par des simulations électromagnétiques en 3D ;
- une modélisation PEEC qui consiste à découper virtuellement une ligne en plusieurs tronçons et à modéliser chaque tronçon par une cellule d'éléments passifs.

Ces méthodes de modélisation nous permettent d'obtenir des modèles, pouvant se présenter sous trois aspects : électriques, mathématiques ou échantillons en fréquence obtenus par des mesures. Ces modèles peuvent alors être représentés par des fonctions de transfert dans le domaine de Laplace. Souvent d'ordre élevé, ces modèles (ou les fonctions de transfert associées) engendrent des simulations temporelles lentes.

Phase 2- Réduction d'ordre de modèle. Cette étape consiste à élaborer de nouveaux modèles comportementaux, précis, efficaces et d'ordre réduit en utilisant des techniques mathématiques de réduction.

Ces 2 étapes nous permettent l'obtention d'un modèle simplifié conduisant à des simulations temporelles plus rapides.

Une phase supplémentaire de représentation électrique équivalente des modèles peut permettre d'insérer les modèles réduits au sein des simulateurs temporels classiques (de type SPICE par exemple).

Les méthodes de modélisation citées ci-dessus seront abordées de manière plus détaillée dans la suite de ce chapitre.

I.5. Modélisation des interconnexions

La modélisation repose sur la résolution des équations de Maxwell qui constituent une extension ou généralisation des lois de l'électrostatique (loi de Faraday ou Lenz ou Laplace ou Lorentz) et de la magnétostatique (théorème d'Ampère), à l'ensemble des problèmes faisant intervenir des champs électrique et magnétique. La théorie de la propagation des ondes électromagnétiques est à la base de la modélisation des interconnexions en circuits intégrés dans le sens où elle mène au formalisme couramment utilisé, à savoir une modélisation des lignes sous la forme de paramètres R, L, C et G. Au cours de ce chapitre, nous décrivons comment, à partir des équations électromagnétiques, il est possible de modéliser le comportement électrique des interconnexions.

I.5.1. Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell, telles que nous les connaissons, sont nées il y a déjà plus d'un siècle. Les télécommunications utilisent ces équations comme base en vue de la modélisation.

Les équations de Maxwell, régissant les phénomènes électromagnétiques, sont aussi essentielles pour l'analyse des phénomènes propres aux circuits intégrés. Dans notre étude, nous nous intéressons plus particulièrement à la façon dont ces lois peuvent être appliquées aux interconnexions dans les circuits VLSI.

Nous les rappelons ici sous leur forme différentielle.

$$\text{Théorème de Gauss} \qquad \text{div}(\vec{D}) = \rho_c \qquad (1.1)$$

$$\text{Loi de conservation du flux de } B \qquad \text{div}(\vec{B}) = 0$$

$$\text{Equation de Maxwell-Faraday} \quad \text{rot}(\vec{E}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Equation de Maxwell-Ampère} \quad \text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

\vec{E} dénote le champ électrique, \vec{B} le champ magnétique, \vec{D} le vecteur excitation électrique, \vec{H} le vecteur excitation magnétique, ρ_c la distribution de charge et \vec{j} le vecteur distribution de densité de courant.

Afin de déterminer le comportement électromagnétique des structures d'interconnexions et de mettre en évidence tous les phénomènes spécifiques au domaine des hyperfréquences, nous pouvons faire appel à des logiciels de «calcul 3D» utilisant directement les équations de Maxwell. Ces outils sont basés en général sur une méthode de différences finies ou d'éléments finis qui permet l'obtention de solutions locales pour les équations de Maxwell dans un domaine limité par des frontières artificielles. L'approche conduit à des résultats de grande précision mais son application est limitée par un temps de calcul extrêmement élevé. Il n'est donc pas envisageable de simuler de cette manière le comportement de tout un réseau d'interconnexions. Elle constitue plutôt un point de départ et en même temps une référence permettant de valider les modèles plus simples.

L'approche la plus répandue pour la description d'une ligne d'interconnexion est la ligne de transmission reposant sur la propagation d'une onde TEM. Lorsque la fréquence des signaux se propageant sur une ligne augmente, il devient nécessaire de prendre en compte les phénomènes de propagation.

Quand il existe une direction privilégiée de propagation, les équations de Maxwell se ramènent aux équations du télégraphiste, ou équations des lignes de transmission.

I.5.2. Equations des télégraphistes

L'intérêt se porte essentiellement sur la façon dont les ondes électromagnétiques se propagent dans un milieu représentatif (conducteurs-diélectrique). On peut considérer que les interconnexions se comportent comme des guides d'onde attribuant une direction privilégiée à celles-ci. On distingue alors quatre modes de propagation possibles :

- Mode TE (transverse électrique) : la composante longitudinale du champ électrique est considérée comme nulle;
- Mode TM (transverse magnétique) : la composante longitudinale du champ magnétique est considérée comme nulle;
- Mode TEM (transverse électromagnétique) : les deux composantes longitudinales sont nulles.

C'est ce dernier mode de propagation qui est traditionnellement considéré pour la modélisation des interconnexions car il s'applique aux guides d'ondes placés dans des milieux homogènes. L'hypothèse TEM mène à un modèle de ligne sans pertes. Ce modèle très simple n'est malheureusement pas applicable dans le cas des lignes d'interconnexions VLSI [Que06].

- Mode quasi-TEM – transverse électromagnétique

Pour des lignes situées au même niveau de métallisation, ces hypothèses «quasi-TEM» sont souvent pertinentes. L'approche quasi-TEM/TEM reste toujours viable pour décrire une ligne d'interconnexion comme une ligne de transmission [Que06].

I.5.2.1. Modèle électrique équivalent aux interconnexions

Grâce aux formulations des équations de Maxwell, on peut extraire les paramètres de ligne à partir de ce que l'on appelle l'équivalence ligne de transmission [Cla94], [Wil97]. Celle-ci n'est valable que dans le cas où l'on se trouve dans le mode de transmission TEM ou quasi TEM.

On parvient à décrire une ligne de transmission via un modèle électrique. Les composants linéiques étant exprimés par unité de longueur, utiliser le modèle électrique revient à considérer une ligne de longueur élémentaire dx . Le modèle ne doit faire intervenir que des tensions et des courants. Pour cela on utilise le modèle distribué de la ligne de transmission. Les tensions et courants traversant la ligne sont dépendants du temps t mais aussi du positionnement considéré sur la ligne. On cherche alors à déterminer l'évolution du courant et de la tension entre le début de la ligne (x) et la fin du tronçon élémentaire de ligne ($x+dx$).

a. Modèle électrique d'une interconnexion isolée

La ligne de transmission est composée de deux conducteurs entourés par un diélectrique homogène. Le modèle d'un segment de longueur élémentaire dx d'une ligne isolée entre les distances x et $x+dx$ est représenté figure 1.5.

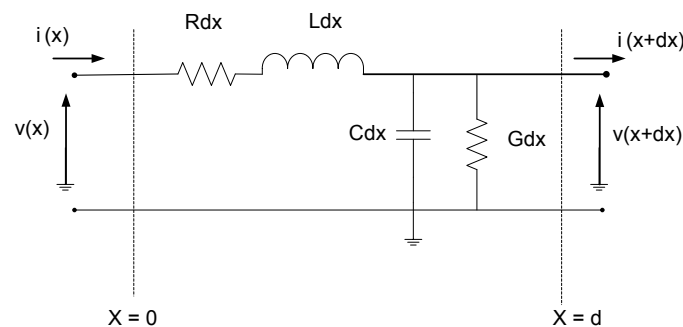


Figure 1.6 : Modèle électrique équivalent d'un tronçon de ligne de transmission

Les grandeurs R , L , C , G sont les paramètres primaires de la ligne de transmission :

- R : la résistance linéique (Ω/m) qui représente les pertes ohmiques dans le conducteur,
- G : la conductance linéique (S/m) qui représente les pertes diélectriques dans l'isolant entre deux lignes,
- C : la capacité linéique (F/m) qui existe entre la ligne et son plan de masse,
- L : l'inductance linéique (H/m) de la ligne.

Une ligne de transmission peut être vue comme un quadripôle. En appliquant les lois de Kirchhoff, on détermine les expressions du courant i et de la tension v respectivement suivant t et x , on établit alors le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= -Ri(x,t) - L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= -Gv(x,t) - C\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}.\end{aligned}\quad (1.2)$$

C'est la forme classique des équations du télégraphiste qui s'écrivent aussi en régime harmonique sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x,\omega)}{\partial x} &= -(R + jL\omega)I(x,\omega), \\ \frac{\partial I(x,\omega)}{\partial x} &= -(G + jC\omega)V(x,\omega).\end{aligned}\quad (1.3)$$

b. Modèle électrique de deux interconnexions couplées

Considérons maintenant deux lignes couplées. Le phénomène que nous cherchons à mettre en évidence est la diaphonie. La présence d'une inductance mutuelle L_{12} et d'une capacité de couplage C_{12} traduit ce phénomène au niveau du schéma électrique, comme on peut le voir figure I.7.

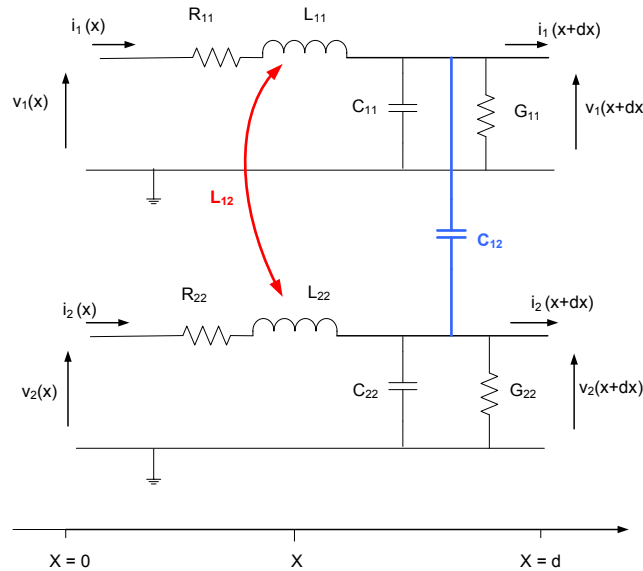


Figure I.7 : Modèle électrique de deux lignes d'interconnexions couplées

Une structure à deux lignes couplées peut supporter deux modes de propagations TEM (sans fréquence de coupure). Dans ce cas, en présence de pertes ce mode est appelé mode quasi-TEM.

Les équations du télégraphiste en régime harmonique s'écrivent

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_1(x,\omega)}{\partial x} &= -(R_{11} + jL_{11}\omega)I_1(x,\omega) - jL_{12}\omega I_2(x,\omega) \\ \frac{\partial V_2(x,\omega)}{\partial x} &= -jL_{12}\omega I_1(x,\omega) - (R_{22} + jL_{22}\omega)I_2(x,\omega)\end{aligned}\quad (1.4)$$

$$\frac{\partial I_1(x, \omega)}{\partial x} = -(G_{11} + j C_{11} \omega) V_1(x, \omega) - j C_{12} \omega V_2(x, \omega)$$

$$\frac{\partial I_2(x, \omega)}{\partial x} = -j C_{21} \omega V_1(x, \omega) - (G_{22} + j C_{22} \omega) V_2(x, \omega)$$

Comme les pertes dues aux effets de proximité et aux pertes diélectriques entre les deux lignes sont généralement très faibles et négligeables, les termes de couplage correspondant R_{12} et G_{12} ne figurent pas dans les équations (1.4).

c. Modèle électrique de plusieurs interconnexions couplées

Généralisons maintenant ces expressions pour un système de N lignes couplées (indiquées de 1 à N) et d'un conducteur de référence (indice 0). Dans le cas général, pour N conducteurs uniformes selon la direction de propagation x, l'un d'entre eux est considéré comme le conducteur de référence pour les tensions, N-1 modes quasi-TEM peuvent se propager. La figure I.8 présente une structure de N interconnexions couplées.

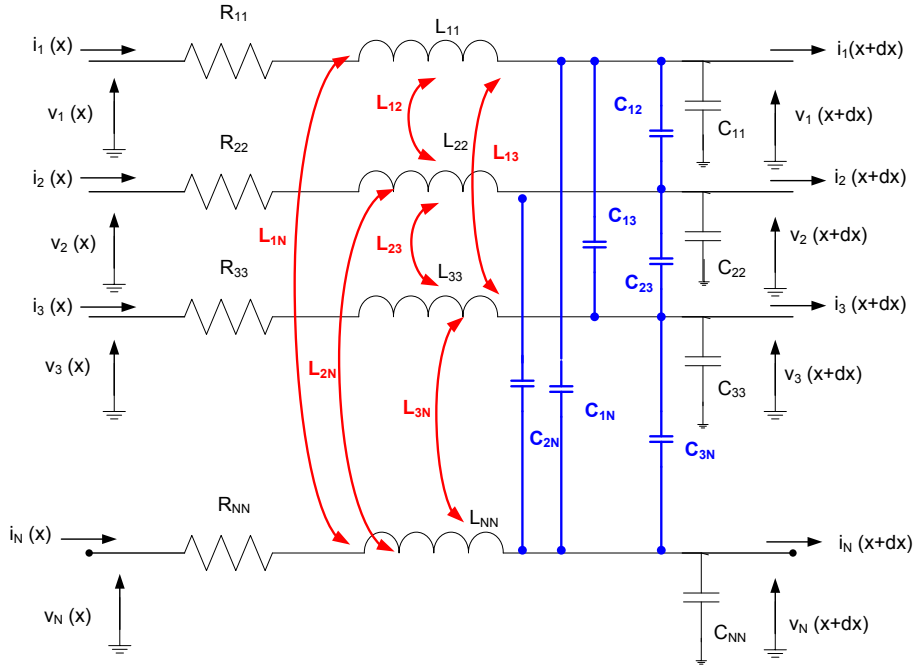


Figure I.8 : Système de N lignes d'interconnexions couplées

Les équations des télégraphistes pour deux lignes couplées sont données par (I.4). Par analogie, les tensions et courants sur N lignes couplées comme le montre la figure I.8 sont régis par les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1(x, \omega)}{\partial x} &= -(R_{11} + jL_{11}\omega)I_1(x, \omega) - jL_{12}\omega I_2(x, \omega) - \dots - jL_{1N}\omega I_N(x, \omega) \\ \frac{\partial V_2(x, \omega)}{\partial x} &= -jL_{21}\omega I_1(x, \omega) - (R_{22} + jL_{22}\omega)I_2(x, \omega) - \dots - jL_{2N}\omega I_N(x, \omega) \\ &\vdots \\ \frac{\partial V_N(x, \omega)}{\partial x} &= -jL_{N1}\omega I_1(x, \omega) - jL_{N2}\omega I_2(x, \omega) - \dots - (R_{NN} + jL_{NN}\omega)I_N(x, \omega) \end{aligned} \quad (I.5)$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_1(x, \omega)}{\partial x} &= -(G_{11} + jC_{11}\omega)V_1(x, \omega) - jC_{12}\omega V_2(x, \omega) - \dots - jC_{1N}\omega V_N(x, \omega) \\
 \frac{\partial I_2(x, \omega)}{\partial x} &= -jC_{21}\omega V_1(x, \omega) - (G_{22} + jC_{22}\omega)V_2(x, \omega) - \dots - jC_{2N}\omega V_N(x, \omega) \\
 &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \frac{\partial I_N(x, \omega)}{\partial x} &= -jC_{N1}\omega V_1(x, \omega) - jC_{N2}\omega V_2(x, \omega) - \dots - (G_{NN} + jC_{NN}\omega)V_N(x, \omega)
 \end{aligned}$$

Les paramètres électriques des interconnexions couplées ainsi que les tensions et courants s'écrivent sous forme matricielle pour rendre compte des effets de couplage électromagnétiques entre elles.

Pour N lignes couplées, les paramètres primaires se présentent sous la forme de matrices R, L, C, G de dimension N x N, pour lesquelles les éléments pp correspondent aux effets propres des lignes (ligne p) et les éléments pq les effets couplés entre la ligne p et une ligne proche voisine q parmi les N-1 autres lignes.

Les courants et tensions i_q , v_q sont réunis dans des vecteurs \vec{I} et \vec{V} contenant les courants et tensions des N lignes. Les équations de (I.5) seront alors utilisées sous la forme matricielle

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1N} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{N1} & L_{N2} & \dots & L_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} \\
 -\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \dots & C_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{I.6}$$

La capacité de couplage C_{pq} entre la ligne p et une autre ligne q est égale à la capacité de couplage C_{qp} (il s'agit de la même capacité d'un point de vue modélisation). De même, les inductances mutuelles L_{pq} et L_{qp} sont égales.

Posons à présent $s = j\omega$ dans (I.6) afin de se ramener au domaine de Laplace, avec $Z = R + sL$ et $Y = G + sC$, nous pouvons alors résumer les équations (I.6) sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} &= -Z\vec{I} \\
 \frac{\partial \vec{I}}{\partial x} &= -Y\vec{V}
 \end{aligned} \tag{I.7}$$

Après une deuxième dérivation par rapport à x nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} &= ZY\vec{V} \\ \frac{\partial^2 \vec{I}}{\partial x^2} &= YZ\vec{I}\end{aligned}\quad (\text{I.8})$$

L'expression (I.8) permet la détermination par intégration de la relation liant les courants et les tensions de sortie aux courants et tensions d'entrée :

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_d \\ \vec{I}_d \end{bmatrix} = e^{[A]d} \begin{bmatrix} \vec{V}_0 \\ \vec{I}_0 \end{bmatrix} \text{ avec } [A] = \begin{bmatrix} 0 & -Zd \\ -Yd & 0 \end{bmatrix} \text{ à } x = d.$$

Cette dernière écriture donne directement les éléments de la matrice chaîne définie par

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_d \\ \vec{I}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ -I_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_0 \\ \vec{I}_0 \end{bmatrix} \text{ et ayant la forme}$$

$$\begin{bmatrix} T \\ -I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(Zd Yd)^{1/2} & -\sinh(Zd Yd)^{1/2} (Zd Yd)^{1/2} Yd^{-1} \\ -Yd (Zd Yd)^{1/2} \sinh(Zd Yd)^{1/2} & Yd \cosh(Zd Yd)^{1/2} Yd^{-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{I.9})$$

De la matrice chaîne, on peut déduire les expressions de toutes les matrices permettant de caractériser le quadripôle. En particulier la matrice admittance s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} \vec{I}_0 \\ \vec{I}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_0 \\ \vec{V}_d \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{bmatrix} Y \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Zd Yd)^{1/2} [Zd \cdot \sinh(Zd Yd)^{1/2}]^{-1} \cosh(Zd Yd)^{1/2} & -(Zd Yd)^{1/2} [Zd \cdot \sinh(Zd Yd)^{1/2}]^{-1} \\ -(Zd Yd)^{1/2} [Zd \cdot \sinh(Zd Yd)^{1/2}]^{-1} & (Zd Yd)^{1/2} [Zd \cdot \sinh(Zd Yd)^{1/2}]^{-1} \cosh(Zd Yd)^{1/2} \end{bmatrix} \quad (\text{I.10})$$

En hyperfréquence, on préfère bien souvent caractériser le quadripôle via sa matrice de répartition $[S]$, ce qui permet, par analogie avec les lignes de transmission, de définir un quadripôle en termes de transmission et réflexion. Les paramètres S (Scattering parameters ou paramètres de diffusion) sont des grandeurs complexes, sans dimension, qui rendent compte des différents processus de transmission et de réflexion mis en jeu au niveau des entrées et des sorties d'un multipôle. Pour un quadripôle ils sont au nombre de quatre S_{11} , S_{12} , S_{21} et S_{22}

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}. \quad (\text{I.11})$$

Ces paramètres S suffisent donc pour caractériser le comportement d'un réseau linéaire. Comme les paramètres S d'un dispositif hyperfréquence varient avec la fréquence, il est nécessaire de connaître ces paramètres S à chaque fréquence d'intérêt.

Pour décrire les lignes, il est également possible d'exprimer les matrices impédances ou hybrides, mais durant ce travail de thèse nous avons surtout utilisé la matrice admittance et la matrice des paramètres S .

Notons la présence des fonctions \sinh et \cosh dans l'expression (I.9) et (I.10) ; les éléments des deux matrices sont irrationnels et par conséquent l'ordre du système est infini. La

résolution des équations des télégraphistes nous donne donc des modèles mathématiques complexes difficiles à simuler dans le domaine temporel.

I.5.3. Modélisation 3D (extraction de paramètres RLCG)

A partir d'un réseau d'interconnexions, il est possible d'extraire les paramètres $[R]$, $[L]$, $[C]$ et $[G]$ de chaque ligne ainsi que les couplages capacitifs et inductifs existant entre les lignes de façon à effectuer des simulations temporelles à l'aide d'outils de type SPICE (simulateurs de circuits analogiques). Plusieurs techniques sont proposées dans la littérature pour extraire les paramètres caractéristiques des lignes (voir [Que06], et ses références). Une simulation électromagnétique de la structure à l'aide de logiciels en trois dimensions tels que HFSS est souvent effectuée afin de déterminer de manière très précise les paramètres chaînes $[T]$ ou de répartition $[S]$, les paramètres RLCG sont extraits par la suite en fonction de ces derniers.

Dans [Que06], Y. Quéré a développé une approche d'extraction dite « pleine-onde » qui est une approche fréquentielle et à éléments finis. Les paramètres RLCG sont obtenus à partir des mesures des matrices de répartition « S » évoluant en fonction de la fréquence via l'utilisation de HFSS résolvant les équations de Maxwell par la méthode des éléments finis.

I.5.4. Modélisation PEEC

La modélisation PEEC (Partial Element Equivalent Circuit) a été développée pour la représentation des interconnexions, elle consiste à découper virtuellement la ligne (ou l'ensemble de lignes couplées) en plusieurs tronçons de longueur élémentaire dl .

Le principe est de modéliser chaque tronçon de la ligne de transmission par des cellules RLC ou RLCG, telles que représentées figure I.6 (ou figure I.7 pour deux lignes couplées, figure I.8 pour plusieurs lignes couplées), formant alors un circuit équivalent composé d'éléments partiels. La qualité de la modélisation dépend du nombre de cellules considérées pour approcher la ligne.

Elle reste encore à ce jour une technique extrêmement utilisée pour la modélisation des lignes de transmission et pour traiter les problèmes de circuits électromagnétiques dans les domaines temporels et fréquentiels. Les termes des matrices chaîne ou admittance du système qui en résultent sont des polynômes dans le domaine de Laplace. L'ordre du système est donc fini, mais souvent très élevé pour une bonne approximation.

Les modèles électriques à éléments localisés (modèles PEEC) généralement employés ne sont de bonne qualité qu'au prix d'un découpage virtuel des interconnexions en tronçons de longueurs très inférieures à la longueur des ondes propagées. La quantité importante de tronçons d'interconnexions à prendre en compte lors des simulations temporelles d'une fonction élémentaire d'un circuit conduit alors à des temps de simulation très longs.

I.5.5. Bilan sur les modèles classiques d'interconnexion

Si les interconnexions ont été longtemps négligées, elles sont aujourd'hui au centre de nombreuses études. Nous avons constaté qu'aux vues des rapides évolutions technologiques, le délai de propagation, le bruit induit par couplage diaphonique vont devenir des facteurs prédominants dans le bon fonctionnement des circuits intégrés. Il paraît donc nécessaire de mettre en place des méthodologies de modélisation, extraction et simulation de circuits autour des interconnexions pour s'assurer de la fiabilité des systèmes.

Nous avons abordé dans ce chapitre les méthodes de modélisation des interconnexions. La simulation en 3D est actuellement l'outil le plus précis qui permet pour une structure donnée la résolution numérique des équations de Maxwell. Après une extraction de paramètres, un modèle en accord avec les équations des télégraphistes peut être construit sous une forme analytique irrationnelle comme on a pu le voir dans le paragraphe I.4.2 ou bien suite à une discrétisation sous la forme d'un modèle PEEC généralement de dimension importante. La modélisation de systèmes complexes tout en étant précise, doit donc être d'ordre limité afin de ne pas augmenter les temps de calcul des simulateurs temporels. Aussi, l'usage direct de ces méthodes de modélisation peut nécessiter un grand nombre d'équations, entraînant un volume de calcul important lors de la simulation et pouvant engendrer des difficultés numériques.

Les simulations efficaces des structures de lignes d'interconnexion dans un circuit ou dans un système, nécessitent des représentations plus simples. L'obtention d'une telle représentation génère une étape supplémentaire dans le processus de modélisation – la réduction d'ordre des modèles.

L'étude qui fait objet de ce mémoire consiste à mettre en place un outil permettant l'identification et la modélisation d'ordre réduit de différents types de systèmes électriques linéaires afin d'en diminuer les temps de simulation. Dans la section suivante, les différentes approches sont présentées et nous citerons un certain nombre de méthodes de réduction de modèle qui trouvent leur application dans le domaine des interconnexions.

I.6. Réduction d'ordre des modèles d'interconnexion

Il existe plusieurs définitions de la réduction de l'ordre du modèle, tout dépend du contexte et du modèle à réduire. A l'origine, les algorithmes de réduction d'ordre de modèles ont été développés dans le domaine des systèmes et de la théorie du contrôle, dans le but de réduire leur complexité tout en préservant, dans la mesure du possible, leurs propriétés entrée-sortie.

La réduction d'ordre de modèle essaye de préserver les caractéristiques essentielles d'une structure. Cela signifie qu'à un stade précoce du processus, les propriétés les plus fondamentales du modèle original doivent déjà être présentes. A la fin du processus de réduction, toutes les propriétés nécessaires du modèle original doivent être capturées avec une précision suffisante, tout cela devant être fait automatiquement.

Aujourd'hui, la réduction d'ordre de modèle est un domaine de recherche florissant, tant dans l'étude des systèmes, dans la théorie du contrôle que dans l'analyse numérique. Depuis plus

d'une vingtaine d'années, de nombreuses méthodes sont apparues. Le choix de l'une d'entre elles se fait en fonction de la description du modèle original (représentation dans l'espace d'états, fonction de transfert, pôles/résidus,...), de sa nature (linéaire ou non-linéaire, stable ou instable, temps continu ou temps discret,...) et de la précision souhaitée.

Nous pouvons trouver un grand nombre de méthodes de réduction, et beaucoup d'approches possibles dans la littérature. Plusieurs classifications de ces méthodes sont proposées telles que dans [Sim05], [Ben05] suivant les principes mathématiques utilisés. La plupart de ces méthodes proposées sont numériques et reposent sur un ensemble de procédures et d'algorithmes de minimisation. Nous proposons une classification simplifiée, orientée plus vers l'application. En fonction du point de départ de la méthode, des données nécessaires pour son initialisation, nous distinguons deux classes principales :

- les méthodes utilisant des représentations d'état (l'ordre du système original est obligatoirement fini)
- les méthodes utilisant des mesures en fréquence ou des fonctions de transfert irrationnelles (l'ordre du système original peut être infini).

I.6.1. Méthodes utilisant des représentations d'état

Cette première catégorie est la plus répandue dans la littérature. Elle a comme point de départ un modèle électrique du système. Dans le cadre des lignes d'interconnexion, le modèle électrique d'origine est basé sur l'approche PEEC et des équations d'état décrivant le système (modèle circuit rationnel souvent d'ordre élevé). Parmi ces méthodes, nous trouvons celles utilisant la projection sur un sous-espace de Krylov parmi les plus connues (Padé, Arnoldi et PRIMA).

Dans ce qui suit, nous présentons dans un premier temps les équations d'état. Ensuite, nous présentons, via l'exemple d'une ligne d'interconnexion, le principe des méthodes de réduction les plus courantes.

• La représentation d'état

La représentation d'état permet de décrire un circuit. Il existe plusieurs manières d'écrire les équations d'état mais la forme généralement utilisée pour représenter les circuits électriques est la forme MNA (Modified Nodal Analysis).

Cette représentation est caractérisée par les équations d'état :

$$M \frac{dx(t)}{dt} = -Nx(t) + Pu(t) \quad (\text{I.12})$$

$$y(t) = Q^T x(t) \quad (\text{I.13})$$

avec: $x(t)$: vecteur d'état, réunit les variables du circuit (tensions ou courants)
 $u(t)$: vecteur d'entrée, réunit les entrées (sources de courant ou de tension)
 $y(t)$: vecteur de sortie, réunit les sorties (tensions ou courants observés)

La matrice M représente la contribution des éléments capacitifs et inductifs du circuit, la matrice N la contribution des éléments résistifs et conductifs, la matrice P la contribution des sources indépendantes. La matrice Q permet de sélectionner les sorties du circuit.

La transformée de Laplace des équations d'état est donnée par

$$sM\hat{x}(s) = -N\hat{x}(s) + P\hat{u}(s) \quad (\text{I.14})$$

$$\hat{y}(s) = Q^T X(s) \quad (\text{I.15})$$

Nous pouvons obtenir la matrice de fonctions de transfert dans le domaine de Laplace

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = Q^T (Ms + N)^{-1} P \quad (\text{I.16})$$

Remarque :

On peut également avoir

$$\hat{y}(s) = Q^T \hat{x}(s) + T\hat{u}(s) \text{ ou } Y(s) = Q^T X(s) + (T + T's)U(s)$$

et donc $H(s) = Q^T (Ms + N)^{-1} P + T$ ou $H(s) = Q^T (Ms + N)^{-1} P + T + T's$

où $T + Ts$ est une contribution directe qui peut apparaître lorsque $H(s)$ représente des matrices admittances ou impédances. Dans les outils développés, cette contribution directe irréductible est généralement extraite avant la réduction d'ordre.

• Modèle de ligne d'interconnexion RLC

Dans cet exemple, nous modélisons la ligne de transmission par n cellules RLC identiques (figure I.9).

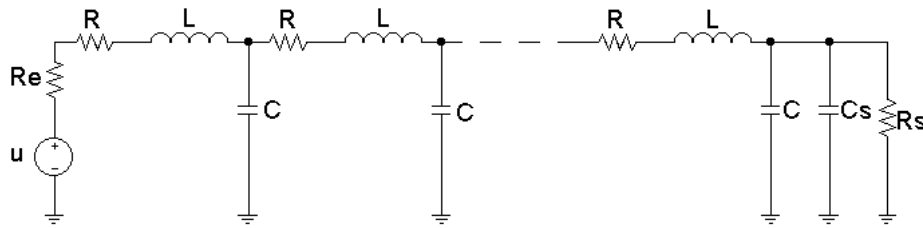


Figure I.9 : Une ligne modélisée par des cellules RLC

Nous considérons comme variables d'état, les tensions aux bornes des capacités, ainsi que les courants qui traversent les inductances, le vecteur d'état $x(t)$ est donc de la forme

$$x = [v_1 \quad \cdots \quad v_n \quad i_1 \quad \cdots \quad i_n]^T,$$

$$\dot{x} = [\dot{v}_1 \quad \cdots \quad \dot{v}_n \quad \dot{i}_1 \quad \cdots \quad \dot{i}_n]^T.$$

Si la sortie que nous désirons observer est V_n , nous obtenons alors

$$Q = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T.$$

Les matrices d'état N , P , Q et M sont données par

$$N = \begin{bmatrix} & & & -1 & 1 & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & -1 \\ 1 & & & \frac{1}{Rs} & & & & \\ & & & & (Re+R) & & & \\ -1 & \ddots & & & & R & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & -1 & 1 & & & \\ & & & & & R & & \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } M = \begin{bmatrix} C & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & C & & \\ & & & L & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & L \end{bmatrix}$$

Les éléments des matrices sont par défaut égaux à 0.

La taille des matrices est $N:2n \times 2n$, $P:2n \times p$, $Q:2n \times q$, $M:2n \times 2n$ où p et q sont respectivement le nombre d'entrées et le nombre de sorties (pour l'exemple présenté $p = q = 1$). L'ordre du système est $2n$ pour l'exemple choisi. L'objectif de la réduction de modèle est de trouver un système d'ordre $q < n$ approchant les caractéristiques du système d'origine. Plusieurs techniques possibles sont présentées par la suite.

• Réduction par projection sur un sous-espace de Krylov

Une grande partie des méthodes de réduction actuelles utilise comme principe la conservation des moments temporels par projection sur un sous-espace de Krylov.

a- Principe de la réduction par projection

La technique consiste à choisir une matrice U de taille $N \times q$, puis à opérer le changement de variable $x = U\tilde{x}$ dans (I.14) et (I.15). Les expressions suivantes en découlent

$$\begin{aligned} MU\dot{\tilde{x}} &= -NU\tilde{x} + Pu \\ \tilde{y} &= Q^T U\tilde{x} \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

Il résulte de ce changement de variable une diminution du nombre de variables d'état, mais il reste encore un grand nombre d'équations. Le système sera donc multiplié à gauche par la matrice V de taille $N \times q$ afin de réduire le nombre d'équations, ce qui correspond à

$$\begin{aligned} V^T MU\dot{\tilde{x}} &= -V^T NU\tilde{x} + V^T Pu \\ \tilde{y} &= Q^T U\tilde{x}. \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

En effectuant les substitutions $\tilde{N} = V^T NU$, $\tilde{M} = V^T MU$, $\tilde{P} = V^T P$, $\tilde{Q}^T = Q^T U$ les expressions (I.17) se récrivent sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{M}\dot{\tilde{x}} &= -\tilde{N}\tilde{x} + \tilde{P}u \\ \tilde{y} &= \tilde{Q}^T \tilde{x} \end{aligned}$$

où \tilde{M} , \tilde{N} , \tilde{P} et \tilde{Q} sont les matrices du système réduit.

b- Le sous-espace de Krylov

Différentes méthodes existent pour construire un espace de Krylov et générer les matrices U et V pour que, lors de la projection les premiers moments définis par

$$m_0 = Q^T r$$

$$m_i = Q^T T^i r$$

avec $r = N^{-1}P$, $T = -N^{-1}M$, soient conservés.

Deux sous-espaces de Krylov d'ordre q peuvent être par la suite construits sous la forme

$$K_q(U_1, P) \text{ engendré par } \{U_1, PU_1, \dots, P^{q-1}U_1\}$$

$$K_q(V_1, P^T) \text{ engendré par } \{V_1, P^T V_1, \dots, (P^T)^{q-1}V_1\}$$

avec $U_1 = r$ et $V_1 = Q$.

Il suffit, pour créer les sous-espaces de Krylov d'initialiser U_1 et V_1 et par une relation de récurrence de calculer les vecteurs suivants et ensuite de les orthogonaliser. Pour calculer les matrices réduites, il faut alors projeter les matrices d'état du système original sur les espaces de Krylov

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= V^T N U & \tilde{P} &= V^T P \\ \tilde{M} &= V^T M U & \tilde{Q}^T &= Q^T U \end{aligned} \tag{I.19}$$

Les matrices ont les tailles suivantes $\tilde{N} : q \times q$, $\tilde{P} : q \times 1$, $\tilde{M} : q \times q$, $\tilde{Q} : q \times 1$.

c- Procédures de réduction

Il existe une multitude de procédures pour construire les matrices U et V , les principales sont Padé via Lanczos (PVL), Arnoldi et PRIMA.

Méthode de Padé Via Lanczos (PVL)

Le principe de la méthode de Padé Via Lanczos (PVL) [Fel95] est de calculer l'approximation de Padé de la fonction de transfert du système d'origine, par l'intermédiaire d'une projection sur les deux sous-espaces de Krylov, générés par l'algorithme de Lanczos.

Méthode d'Arnoldi

L'idée de la méthode d'Arnoldi, est de ne construire qu'un sous-espace de Krylov, via l'algorithme de Arnoldi [Arn51], et d'effectuer une transformation congruente sur le système d'origine afin d'obtenir le système réduit. Cette transformation permet de conserver certaines caractéristiques des matrices du système original.

Méthode PRIMA

La très populaire méthode PRIMA [Oda98] est similaire à celle d'Arnoldi, la différence entre les deux méthodes étant liée à la normalisation des vecteurs de la matrice U . Grâce à la transformation congruente, PRIMA et Arnoldi préservent la stabilité et la passivité du système d'origine.

Méthode de SVD Laguerre

La méthode de SVD Laguerre [Kno00], [Kno06] utilise également une projection sur un sous-espace de Krylov. Sa particularité est d'exploiter dans la construction de ce dernier certaines propriétés des fonctions de Laguerre. Elle préserve la stabilité et la passivité du système d'origine.

- **Autres techniques**

D'autres approches possibles sont l'estimation asymptotique de la fonction AWE (*Asymptotic Waveform Estimation*) et les méthodes basées sur une troncature dans la base d'équilibre.

La méthode AWE vise à conserver les $2q$ premiers moments temporels du système d'origine (où q est l'ordre du système réduit). L'idée principale de cette méthode est de développer la fonction de transfert dans le domaine de Laplace en une série de Mac Laurin pour calculer les moments puis, en utilisant une approximation de Padé, de calculer une fonction de transfert réduite, sous forme de fraction rationnelle. La méthode est rarement utilisée actuellement car elle souffre de problème de robustesse numérique et de plus, elle ne garantit pas la conservation de la stabilité ni de la passivité du système.

Une autre technique repose sur un changement de base. Le système d'origine est converti dans la base d'équilibre [Moo81] et par la suite une troncature à l'ordre q est effectuée sur ce système.

Certaines méthodes de réduction utilisant ce type de représentation conservent des propriétés importantes du système d'origine, notamment la passivité. La principale contrainte est liée à la manipulation de matrices de taille très importante. Des problèmes liés à l'inversion des matrices peuvent aussi se poser.

I.6.2. Méthode utilisant des mesures en fréquence

La méthode du Vector Fitting est largement acceptée comme un outil permettant le traitement des systèmes à partir des mesures en fréquence de leur matrice admittance $[Y]$ ou de dispersion $[S]$. Cette méthode suscite depuis quelques années l'intérêt du monde académique et du monde industriel. Nous présentons ici son principe général [Gus99].

Cette méthode effectue l'ajustement (fitting) de données avec des fonctions rationnelles en évitant les optimisations non linéaires. Elle utilise un procédé itératif nécessitant donc une initialisation. Elle est disponible tant dans le domaine temporel que fréquentiel.

Soit $\hat{f}(s)$ la fonction que nous cherchons à approcher par une fraction rationnelle $\tilde{f}(s)$ dont le dénominateur est d'ordre r . Afin de se placer dans le cas des admittances des circuits électriques passifs, l'ordre du numérateur de $\tilde{f}(s)$ est supposé inférieur ou égal à $r+1$. Nous sommes confrontés à un problème non linéaire et comme $\hat{f}(s)$ est connu par des mesures en fréquences, il est plutôt difficile de faire appel à une représentation en variables d'état. La subtilité de la méthode du Vector fitting consiste à introduire une fonction auxiliaire inconnue notée $\hat{\sigma}(s)$ qui admet une approximation rationnelle $\tilde{\sigma}(s)$ de la forme

$$\tilde{\sigma}(s) = \sum_{n=0}^{r-1} \frac{q_n}{s - p_n} + 1. \quad (\text{I.20})$$

Posons $\hat{h}(s) = \hat{\sigma}(s)\hat{f}(s)$ et considérons $\tilde{h}(s)$ une approximation rationnelle de $\hat{h}(s)$ ayant les mêmes pôles que celle de $\hat{\sigma}(s)$,

$$\tilde{h}(s) = \sum_{n=0}^{r-1} \frac{a_n}{s - p_n} + d + es \text{ avec } d, e \in \mathbb{R}. \quad (\text{I.21})$$

Notons que

$$\hat{f}(s)\tilde{\sigma}(s) = \tilde{h}(s) + \hat{\varepsilon}(s) \quad (\text{I.22})$$

où $\hat{\varepsilon}(s)$ est un terme d'erreur.

Si nous intégrons (I.20) et (I.21) à (I.22), nous obtenons

$$\hat{f}(s) \left(\sum_{n=0}^{r-1} \frac{q_n}{s - p_n} + 1 \right) = \sum_{n=0}^{r-1} \frac{a_n}{s - p_n} + d + es + \hat{\varepsilon}(s), \quad \forall s \quad (\text{I.23})$$

Ensuite nous imposons un jeu de pôles $p_n, n=1,2,\dots,r-1$ choisis dans un premier temps de manière arbitraire. Si nous connaissons $\hat{f}(s)$ en un nombre de points $s = s_k, k=1,2,\dots,N$, $N \geq 2r+2$ le problème (I.23) est linéaire et nous pouvons le résoudre au sens des moindres carrés afin de déterminer les q_n, a_n, d, e qui minimisent $\|\varepsilon\|^2$. Suite à la résolution de (I.23)

nous disposons de $\tilde{h}(s)$ et de $\tilde{\sigma}(s)$. Nous pouvons donc obtenir une approximation de $\hat{f}(s)$ sous la forme

$$\tilde{f}(s) = \frac{\tilde{h}(s)}{\tilde{\sigma}(s)}. \quad (\text{I.24})$$

En pratique, la méthode est itérative. Les pôles du modèle obtenu $\tilde{f}(s)$ remplacent les pôles p_n précédemment choisis arbitrairement. Si $\tilde{f}(s)$ est instable, une correction est effectuée par simple changement de signe de la partie réelle des pôles situés dans le demi-plan droit du domaine de Laplace.

I.7. Travaux antérieurs menés au Lab-STICC

Le Lab-STICC bénéficie d'une expérience étendue sur l'étude la transformée de Laguerre en temps continu [Mor00], et en temps discret [Tan94], ainsi que sur la transformée de Kautz [Mor00]. Ce savoir-faire ainsi que des études sur le calcul des grammiens ont permis le développement et le perfectionnement de plusieurs méthodes de réduction d'ordre des modèles de type sous-optimales [Bre93] ou optimales [Nou93], [Vil99]. Le principe général des méthodes développées au Lab-STICC est la construction d'un ensemble de fonctions ayant des propriétés dérivant du système original. Un modèle d'ordre réduit est alors déterminé à partir du grammien associé à cet ensemble de fonctions. L'utilisation de fonctions orthogonales permet de faciliter le calcul des grammiens et la construction du modèle réduit. Les bases de la première méthode sous-optimale développée au Lab-STICC dite «des dérivées/intégrales» ont été mises au point au début des années 90 [Sev93]. Le cœur de cette méthode est la construction d'une matrice de Gram relative à un ensemble de fonctions obtenues par dérivations et intégrations successives des réponses du système original.

La méthode de «Laguerre-Gram à 1 pôle» [Amg05], [Tel07] constitue un progrès significatif car les opérations de dérivation/intégration sont remplacées par l'application répétée d'un simple opérateur linéaire lié aux fonctions de Laguerre. Cette technique, tout comme la

précédente, préserve la stabilité du modèle original mais permet en outre une réduction plus rapide et robuste.

La méthode de «Kautz-Gram à 2 pôles» reprend les mêmes principes que la méthode de «Laguerre-Gram à 1 pôle», mais est cette fois basée sur l'utilisation d'un couple d'opérateurs linéaires simples. La méthode est comme une alternative intéressante à celle de «Laguerre-Gram à 1 pôle» dans le cas de systèmes particuliers possédant une réponse temporelle caractérisée par des oscillations lentement amorties [Tel07]. Ces méthodes ne sont pas itératives et le choix initial, qui se limite au seul pôle des fonctions de Laguerre ou aux deux pôles des fonctions de Kautz, est primordial pour une modélisation de qualité.

Le principe général de ces méthodes sera présenté plus en détail dans le chapitre 3.

I.8. Méthode développée durant ce travail de thèse

La méthode élaborée et étudiée durant ce travail de thèse utilise une nouvelle approche qui s'inscrit dans la continuité des méthodes présentées au paragraphe I.7. Une première modélisation du système original est effectuée à l'aide des bases de fonctions orthogonales de Kautz à plusieurs pôles. Par la suite, le problème non-linéaire est contourné par la construction d'un ensemble de fonctions linéairement indépendantes qui permet la détermination du modèle réduit.

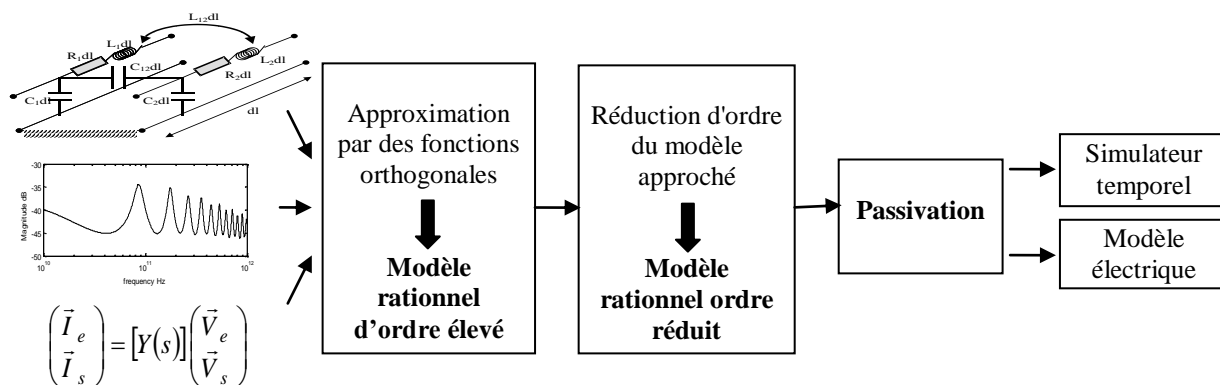


Figure I.10 : Schéma des étapes de modélisation et réduction d'ordre

La figure I.10 présente de manière schématique la démarche proposée dans ce mémoire et les étapes à valider, pour passer du modèle complexe difficile à simuler au modèle rationnel réduit prêt à être intégré dans un simulateur temporel.

Un réseau de connexions caractérisé par un schéma électrique équivalent, un modèle mathématique ou une réponse temporelle est un système complexe qui peut être vu comme un multipôle dont les fonctions de transfert dans le domaine de Laplace sont d'ordre infini ou très élevé. Afin de pouvoir étudier ce genre de structures et caractériser leur modélisation d'ordre réduit, nous avons défini deux phases de traitement complémentaires à effectuer.

1. Première étape : modélisation des réseaux de connexions

Notre algorithme de réduction de modèle suppose une première étape de modélisation du système original considéré à l'aide des bases de fonctions orthogonales de Müntz-Laguerre et/ou de Kautz à R pôles multiples. Les caractéristiques principales de ces fonctions à temps continu sont présentées dans le deuxième chapitre. Le principe est d'approcher le modèle original d'ordre infini ou élevé par un autre modèle construit à l'aide de ces fonctions orthogonales. Cette première étape est une préparation pour la seconde étape, car le nouveau modèle ainsi obtenu, pour être précis, est souvent d'un ordre encore trop élevé. Ce modèle sera considéré comme le modèle de référence pour la seconde phase. Le deuxième chapitre de ce rapport est consacré à cette phase d'approximation à l'aide des fonctions orthogonales de Müntz-Laguerre et/ou de Kautz.

2. Deuxième étape : réduction d'ordre du modèle

Cette étape du traitement fait l'objet du troisième chapitre. Le modèle approché par les fonctions de Kautz à R pôles multiples et/ou de Müntz-Laguerre subit une phase de réduction d'ordre. La méthode de réduction utilisée est basée sur un outil mathématique original développé dans le cadre de cette thèse.

Ces deux étapes nous permettent l'obtention d'un modèle simple, réel rationnel et d'ordre réduit assurant des simulations temporelles plus rapides. Une étape de passivation a posteriori est souvent nécessaire avant la phase de simulation. Un circuit est dit passif si aucun de ses éléments ne génère de l'énergie (en d'autres termes des sources internes au système « artificielle » n'apparaissent pas). Les modèles non passifs représentant un système passif sont indésirables en simulation temporelle. La passivité est importante dans la simulation numérique afin d'éviter que des erreurs liées à la précision des calculateurs ou liées à des troncatures employées dans des algorithmes fassent apparaître de l'énergie dans des éléments passifs [Des04], [Ste04], [Ste07]. Durant ce travail de thèse, nous n'avons que très peu étudié la passivité et nous ne l'avons pas abordé dans ce manuscrit mais des techniques existent pour tester les modèles et corriger a posteriori, si nécessaire, les modèles afin de les rendre passifs [Des04], [Ste04], [Ste07].

I.8. Conclusion

Ce premier chapitre a permis de présenter le contexte général du travail de thèse. Nous avons illustré les effets indésirables que la présence des lignes d'interconnexion peut avoir sur le fonctionnement des circuits intégrés. Nous avons présenté l'importance de la modélisation des interconnexions et donné un rappel de certaines notions de base de l'électromagnétisme. Enfin, nous avons défini la réduction d'ordre des modèles, et fait un état de l'art des méthodes existantes.

Le chapitre suivant est consacré à la modélisation d'un système de connexions basée sur l'emploi des fonctions orthogonales. Nous introduisons les fonctions de Müntz-Laguerre et de Kautz à R pôles multiples à temps continu, en présentant leurs caractéristiques temporelles et fréquentielles. Une attention particulière est ensuite accordée au calcul des coefficients avec la présentation d'une nouvelle méthode de calcul efficace des coefficients mise en œuvre durant cette thèse.

Chapitre II: Approximation rationnelle à l'aide de fonctions orthogonales

II.1. Introduction

La modélisation, art d'élaborer un modèle, se trouve au cœur de plusieurs disciplines scientifiques. L'utilisation des fonctions orthogonales dans la représentation ou l'approximation des systèmes est une approche communément utilisée en traitement du signal, en automatique et d'une manière générale, dans toutes les sciences appliquées.

La diversité des bases de fonctions orthogonales et leurs propriétés attractives font de ce type de fonctions des outils mathématiques quasi incontournables. Une littérature abondante témoigne de l'intérêt du sujet.

L'histoire des fonctions orthogonales est ancienne, elle date du 18^{ème} siècle. Parmi les bases de filtres orthogonaux à fonction de transfert rationnelle, les bases de filtres de Laguerre et de Kautz, sont particulièrement adaptées à la modélisation de systèmes physiques. Les fonctions de Laguerre permettant de générer les filtres du même nom sont issues de polynômes introduits par E. Laguerre (1834-1886). Ces fonctions connaissent depuis des années un net intérêt dans divers domaines d'application, on peut citer les sciences et l'ingénierie du nucléaire, les communications, le traitement du signal et le filtrage numérique, le traitement d'image, la conception de circuits électroniques assistée par ordinateur, l'automatique pour la régulation et le contrôle de système,,....

Constituant une orthogonalisation des fonctions $t^n e^{-\alpha t}$ ($n \geq 0$), et offrant des allures temporelles amorties légèrement oscillantes, elles sont particulièrement adaptées à la modélisation de systèmes physiques et à l'étude de phénomènes transitoires. Elles sont caractérisées par un pôle réel d'ordre multiple. Elles ont une structure simple ce qui leur confère de nombreuses propriétés élémentaires. Elles sont adaptées à la modélisation des systèmes dont la dynamique dominante est du premier ordre. De nombreuses applications pratiques en dérivent.

Néanmoins, pour l'analyse de signaux transitoires plus fortement oscillants ou de systèmes dont les pôles ont une plus grande dispersion dans le demi-plan gauche complexe, les fonctions de Laguerre s'avèrent moins efficaces. La quête de la performance conduit à employer de nouvelles fonctions plus adaptées à ce type de signaux ou systèmes. Les fonctions de Kautz à deux pôles multiples, réels ou complexes conjugués, cas particuliers des fonctions introduites par W.H. Kautz, peuvent répondre à cette attente. Bien qu'elles soient connues du monde scientifique depuis les années 50 [Kau52] [Kau54], elles n'ont été vraiment étudiées qu'à partir des années 1990, et ce n'est que depuis l'étude de Wahlberg B. et Mäkilä M. [Wah96] qu'elles peuvent être efficacement appliquées à la modélisation de systèmes. Elles sont fortement indiquées pour la représentation de systèmes ayant une dynamique dominante du second ordre.

Ces fonctions de Kautz à deux paramètres sont, comparativement aux fonctions de Laguerre, moins bien connues et moins bien exploitées. Cela est en partie explicable par leur plus grande complexité d'emploi, voire à une méconnaissance de leurs propriétés. Néanmoins, nous trouvons dans la littérature certains travaux récents [Kno06], [Lip06] déjà faits sur la modélisation des systèmes et la réduction d'ordre à l'aide des fonctions de Kautz à deux pôles multiples réels ou complexes conjugués. Les fonctions de Kautz ont également été étudiées dans le contexte de la modélisation des lignes d'interconnexions de type VLSI possédant une géométrie simple [Tel07], [Tel07a], [Tel07b].

Lorsque les systèmes, tels que par exemple des réseaux d'interconnexions, font apparaître plusieurs constantes de temps ou plusieurs modes résonants, l'emploi de ces fonctions est limité et ne permet plus d'atteindre une qualité de modélisation suffisante avec un nombre réduit de fonctions. Un réseau de connexions peut avoir une structure d'une grande complexité géométrique, c'est un multiport dont le nombre d'entrées et de sorties peut être important et pour lequel les diverses fonctions de transfert sont d'ordre élevé ou irrationnelles. Dans le but de modéliser ce type de systèmes, plusieurs généralisations des bases orthogonales à fonction de transfert rationnelle, appelées GOBF (Generalized Orthogonal Basis Functions), ont été introduites [Van95], [Chu05], [Jal07],.... Les fonctions de Kautz (à pôles multiples) ainsi que les fonctions de Müntz-Laguerre en font partie.

Les fonctions de Kautz, sont des fonctions réelles, causales et orthogonales dans l'espace des fonctions réelles $L^2([0, \infty[, R)$. Ces fonctions à pôles multiples et les filtres associés peuvent représenter assez adéquatement les systèmes vibrants. Elles ont été utilisées principalement dans des applications en acoustique et audio [Paa03], en contrôle adaptatif de systèmes instables [Orq97] et en identification de vibrations [Dia98].

En ce qui concerne les fonctions de Müntz-Laguerre, elles ont également une forme rationnelle, elles sont causales et d'énergie finie, et forment une base orthonormale dans l'espace des fonctions complexes $L^2([0, \infty[, C)$. Les bases des fonctions de Müntz-Laguerre et celles de Kautz [Kau54] sont obtenues par l'orthonormalisation de Gram-Schmidt d'un ensemble de fonctions exponentielles.

Les fonctions de Müntz-Laguerre, dans leur version classique, sont, comparativement aux fonctions de Kautz moins bien connues et très peu utilisées. Ce sont des fonctions complexes, pas forcément utiles pour représenter des systèmes réels mais elles ont une structure mathématique assez simple (des modules passe-tout d'ordre 1) et s'apparentent à celles de Kautz (des modules passe-tout d'ordre 2). Les fonctions de Müntz-Laguerre seront présentées dans ce manuscrit, mais serviront principalement à expliquer la procédure de réduction d'ordre développée.

Au cours de ce chapitre nous définissons les bases des fonctions orthogonales de Müntz-Laguerre et de Kautz. Nous allons rappeler leurs propriétés élémentaires et donner leur représentation temporelle et fréquentielle. Nous procédons par la suite à la modélisation par projection sur les bases de Müntz-Laguerre et de Kautz puis présentons l'expression des coefficients de ces projections. Le principe est d'approcher le modèle original d'ordre infini ou élevé par un autre modèle construit à l'aide de ces fonctions orthogonales. Pour évaluer la qualité de cette approximation, des exemples sont proposés à la fin du chapitre.

II.2. Définition des fonctions de Müntz-Laguerre

Les fonctions de Müntz-Laguerre notées $\phi_n(t)$ sont des fonctions complexes définies dans le domaine de Laplace par

$$\hat{\phi}_n(s) = \frac{\sqrt{2\Re\{\alpha_n\}}}{s + \alpha_n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{s - \alpha_k^*}{s + \alpha_k} \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{II.1})$$

où les α_k désignent des paramètres réels ou complexes vérifiant $\Re\{\alpha_k\} > 0$.

Les fonctions de Müntz-Laguerre forment une base orthonormée dans l'espace $L^2([0, \infty[, C)$, seulement lorsque la condition de Müntz-Szász [Kno01] est remplie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Re(\alpha_n)}{1 + |\alpha_n|^2} = \infty. \quad (\text{II.2})$$

où $L^2([0, \infty[, C)$ est l'espace des fonctions complexes dont le carré du module est intégrable.

Ce dernier est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(t)g^*(t)dt$ et de la

norme $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Il convient de noter par une inspection de l'expression (II.1), que tous les filtres associés aux fonctions de Müntz-Laguerre ont la même structure (figure II.1), c'est-à-dire un filtre mono-pôle, multiplié par un produit de filtres passe-tout.

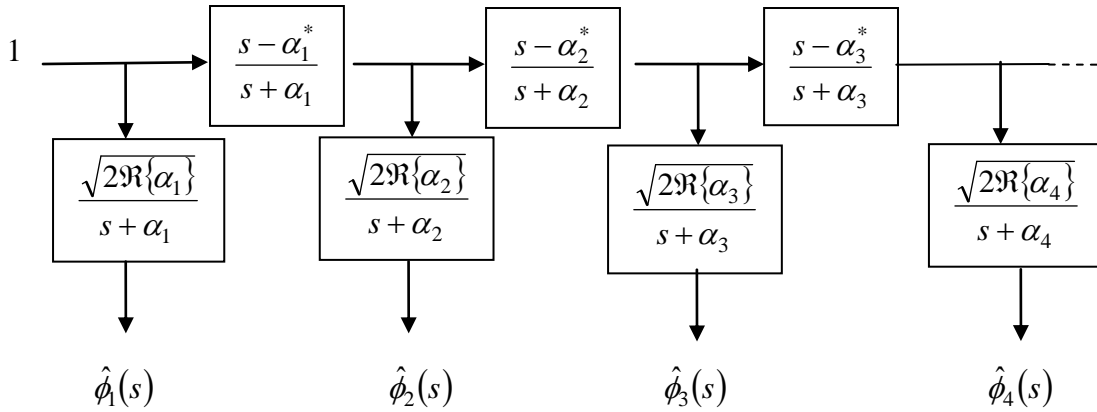


Figure II.1 : Filtre associé aux fonctions de Müntz-Laguerre

Remarque importante :

- Les fonctions que nous utiliserons sont construites à l'aide d'un jeu de R pôles $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_R\}$ réels ou complexes conjugués, le jeu de R pôles se répétant indéfiniment, c'est-à-dire $\alpha_{k+R} = \alpha_k$.
- Comme les fonctions sont définies à l'aide de R pôles se répétant périodiquement à l'infini nous pouvons écrire :

$$\hat{\phi}_{R\lambda+n}(s) = \hat{\phi}_n(s) \cdot [B(s)]^\lambda \quad (\text{II.3})$$

avec $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ et $n = 1, 2, 3, \dots, R$, sachant que $B(s) = \prod_{k=1}^R \frac{s - \alpha_k^*}{s + \alpha_k}$.

- Il en découle également que la condition de Müntz-Szász (II.2) sera toujours vérifiée.

II.2.1. Cas particulier : les fonctions de Laguerre

Les fonctions de Laguerre à temps continu $\varphi_n(t, \alpha)$ sont des fonctions réelles causales définies à partir des polynômes de Laguerre $L_n(t)$

$$\varphi_{n+1}(t, \alpha) \triangleq \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha t} L_n(2\alpha t)$$

où α désigne un paramètre réel positif. Les polynômes de Laguerre réels de degré $n = 0, 1, 2, \dots$, sont donnés $\forall t \in [0, \infty[$ par

$$L_n(t) \triangleq \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-t)^j}{j!}.$$

Les fonctions de Laguerre à temps continu, forment une base orthonormale dans $L^2([0, \infty[, \mathfrak{R})$ vérifiant $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{n,m}$. Elles ont pour transformée de Laplace

$$\hat{\varphi}_n(s) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{s + \alpha} \left(\frac{s - \alpha}{s + \alpha} \right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{II.4})$$

Les fonctions de Laguerre sont donc un cas particulier des fonctions de Müntz-Laguerre pour lesquelles $\alpha_k = \alpha \in \mathfrak{R}^+ \quad \forall k$.

Dans la littérature de nombreuses études ont été déjà faites sur la modélisation des systèmes, et la réduction d'ordre, à l'aide des fonctions de Laguerre. Lorsque la complexité des systèmes s'accroît et fait apparaître des phénomènes oscillants ou résonants, tels qu'ils peuvent par exemple apparaître dans certains réseaux d'interconnexions, l'emploi des fonctions de Laguerre, en nombre limité, ne permet plus d'atteindre facilement une qualité de modélisation suffisante. Des fonctions possédant des pôles variés doivent alors être utilisées.

II.3. Définition des fonctions de Kautz

Les fonctions de Kautz notées $\psi_m(t)$ sont des fonctions réelles et causales qui ne sont pas issues de polynômes. Elles sont définies à partir de leurs transformées de Laplace données par des fonctions d'indice pair $n = 2m$ ou impair $n = 2m - 1$, par

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{2m-1}(s) &= \frac{\sqrt{2(\alpha_{2m} + \alpha_{2m-1})} \alpha_{2m} \alpha_{2m-1}}{(s + \alpha_{2m-1})(s + \alpha_{2m})} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{(s - \alpha_{2k-1}^*)(s - \alpha_{2k}^*)}{(s + \alpha_{2k-1})(s + \alpha_{2k})} \\ \hat{\psi}_{2m}(s) &= \frac{\sqrt{2(\alpha_{2m} + \alpha_{2m-1})} s}{(s + \alpha_{2m-1})(s + \alpha_{2m})} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{(s - \alpha_{2k-1}^*)(s - \alpha_{2k}^*)}{(s + \alpha_{2k-1})(s + \alpha_{2k})} \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

pour $m = 1, 2, 3, \dots$. Les $(-\alpha_k)$ désignent les pôles des fonctions de Kautz, pour $k = 1, 2, \dots$. Les couples $(\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k})$ sont des paramètres réels ou complexes conjugués. On note $\sigma_k = \alpha_{2k-1} + \alpha_{2k}$ et $\pi_k = \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}$, désignant les paramètres réels positifs $\sigma_k, \pi_k \in \mathfrak{R}^{+*}$, on

a alors

$$\hat{\psi}_{2m-1}(s) = \frac{\sqrt{2\sigma_m\pi_m}}{s^2 + \sigma_m s + \pi_m} \prod_{k=1}^{m-1} \left(\frac{s^2 - \sigma_k s + \pi_k}{s^2 + \sigma_k s + \pi_k} \right), \dots$$

$$\hat{\psi}_{2m}(s) = \frac{\sqrt{2\sigma_m} s}{s^2 + \sigma_m s + \pi_m} \prod_{k=1}^{m-1} \left(\frac{s^2 - \sigma_k s + \pi_k}{s^2 + \sigma_k s + \pi_k} \right).$$

pour $m = 1, 2, 3, \dots$

Lorsque la condition de Müntz-Szász (II.2) est remplie, les fonctions de Kautz forment une base orthonormée dans l'espace $L^2([0, \infty[, \mathfrak{R})$, où $L^2([0, \infty[, \mathfrak{R})$ est l'espace des fonctions réelles de carré intégrable. Cet espace est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(t)g(t)dt \text{ et de la norme } \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Les fonctions de Kautz (II.5) peuvent être implémentées sous différentes structures de filtres dont la forme donnée figure II.2. Cette structure est constituée d'une cascade de filtres passe-tout d'ordre 2 associée à des filtres de sortie également d'ordre 2.

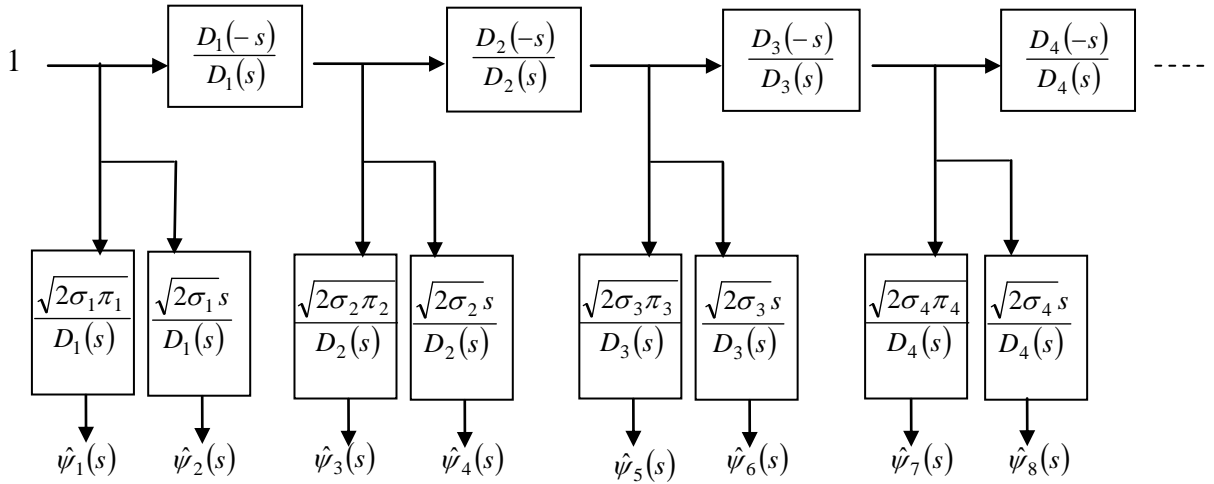


Figure II.2 : Filtre associé aux fonctions de Kautz avec $D_m(s) = s^2 + \sigma_m s + \pi_m$

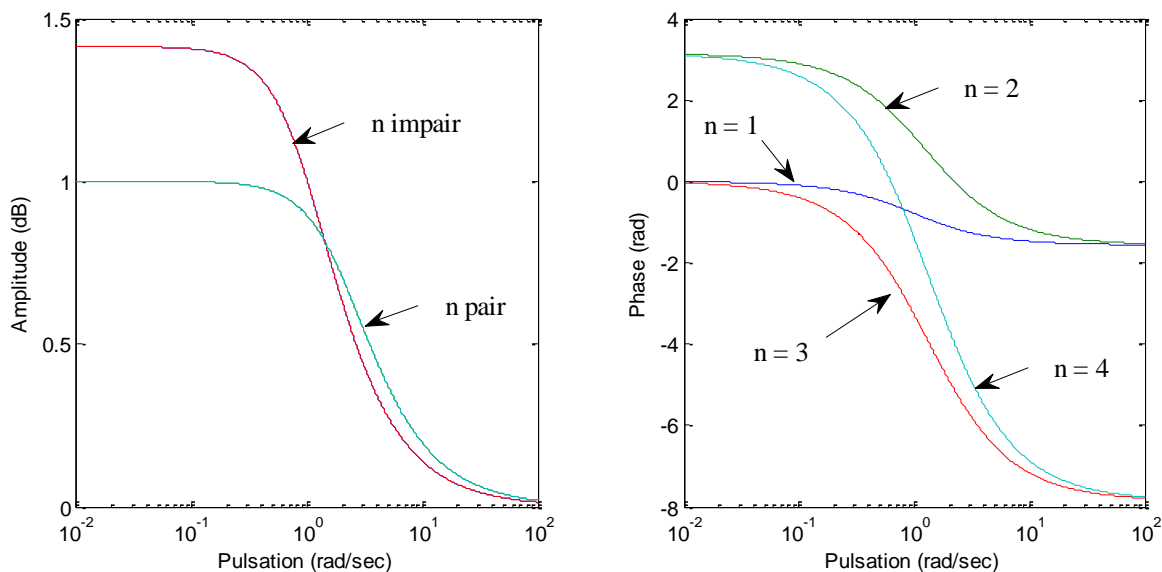
Remarques:

- Les fonctions que nous utiliserons sont des fonctions de Kautz à $R = 2r$ paramètres $(\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k})$ multiples réels ou complexes conjugués se répétant indéfiniment telles que $\alpha_{2k+R} = \alpha_{2k}$ et $\alpha_{2k-1+R} = \alpha_{2k-1}$. A noter que dans cette configuration, la condition de Müntz-Szász (II.2) est toujours vérifiée.- Le cas des fonctions de Kautz à deux pôles multiples ($R = 2$) est un cas particulier qui a également été exploité dans le contexte des lignes d'interconnexions de type VLSI [Tel07a].

II.4. Propriétés

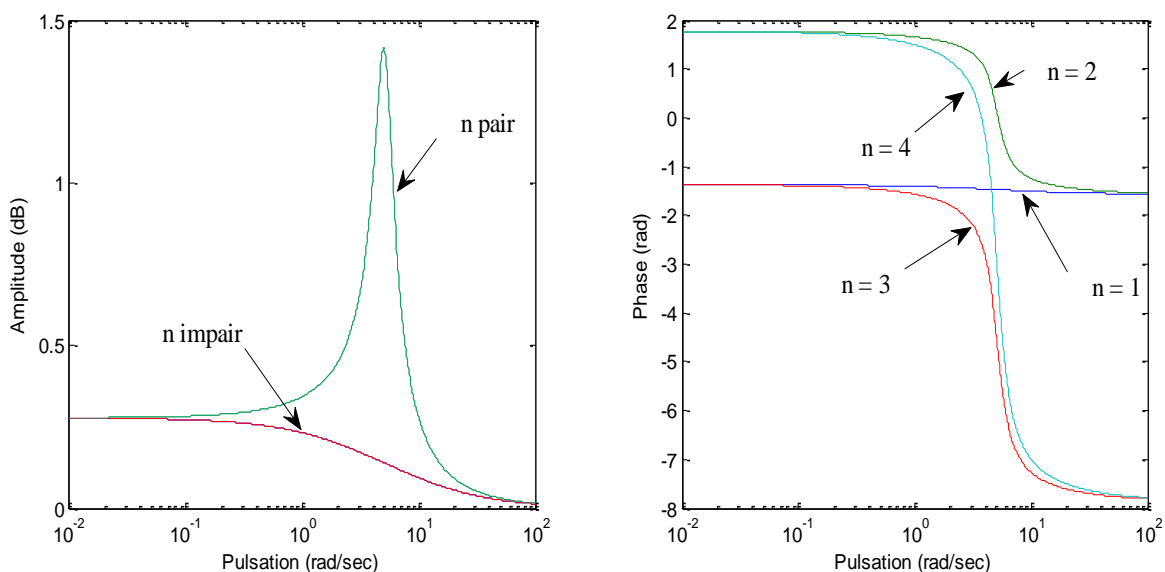
II.4.1. Représentation fréquentielle des fonctions de Müntz-Laguerre A partir des transformées de Laplace des fonctions de Müntz-Laguerre $\hat{\phi}_n(s)$ (II.1), nous pouvons exprimer dans le domaine fréquentiel leurs module et phase. Un exemple de la représentation fréquentielle des quatre premières fonctions de Müntz-Laguerre pour $R = 2$ pôles choisis purement réels ($\bar{\alpha}_R = \{1; 2\}$) est tracé sur les figures II.3 et II.4.

Comme nous pouvons le remarquer sur la figure II.3, avec des pôles réels, les modules des fonctions d'indice pair sont tous identiques, les modules des fonctions d'indice impair également. Ils ont tous un comportement fréquentiel de type passe-bas, quel que soit leur ordre. Sur la figure II.4 les phases sont différentes pour chaque fonction.



Figures II.3 et II.4 : Module et phase de $\hat{\phi}_1(s)$ à $\hat{\phi}_4(s)$ pour $\vec{\alpha} = \{1; 2\}$

Les figures II.5 et II.6 donnent les représentations fréquentielles des quatre premières fonctions de Müntz-Laguerre avec $R=2$ pôles complexes conjugués $\vec{\alpha} = \{1 \pm 5i\}$. Les modules des fonctions d'indice pair (ou impair) sont identiques et présentent une fréquence de résonance positive (ou négative).



Figures II.5 et II.6 : Module et phase de $\hat{\phi}_1(s)$ à $\hat{\phi}_4(s)$ pour $\vec{\alpha} = \{1 \pm 5i\}$

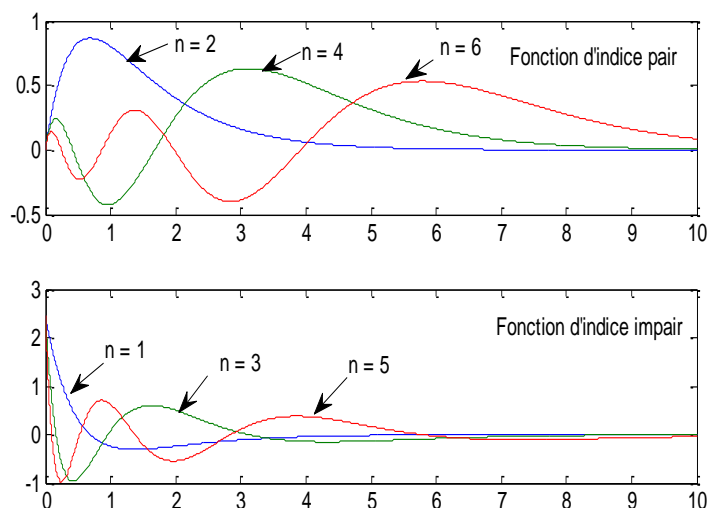
II.4.2. Représentations temporelle et fréquentielle des fonctions de Kautz

Une connaissance de l'allure de Kautz dans le domaine temporel ou fréquentiel nous permet de mieux identifier les différents systèmes qui pourront être représentés à partir de ces fonctions.

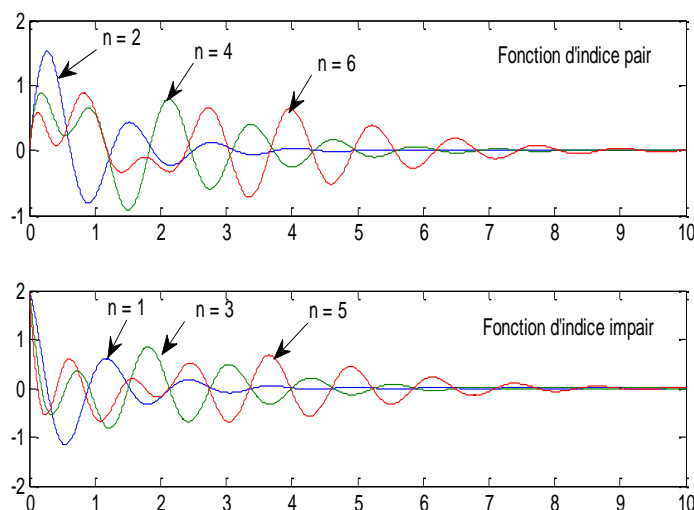
II.4.2.1. Représentation temporelle

L'allure temporelle des fonctions de Kautz dépend fortement des paramètres (*pôles*) choisis. Les pôles multiples peuvent en effet être choisis purement réels ou complexes conjugués.

Nous avons tracé sur les figures II.7 et II.8, les six premières fonctions ($\psi_1(t)$ à $\psi_6(t)$) avec $R=2$ pôles réels $\vec{\alpha} = \{1; 2\}$ et sur les figures II.9 et II.10, les mêmes fonctions avec des pôles complexes conjugués $\vec{\alpha} = \{1 \pm 5i\}$. Nous constatons que quels que soient les pôles multiples choisis, réels ou complexes conjugués, les fonctions d'indice pair sont toutes nulles à l'instant $t=0$, tandis que les fonctions d'indice impair valent $\sqrt{2^*(\alpha_m + \alpha_{m+1})}$ à l'instant $t=0$.



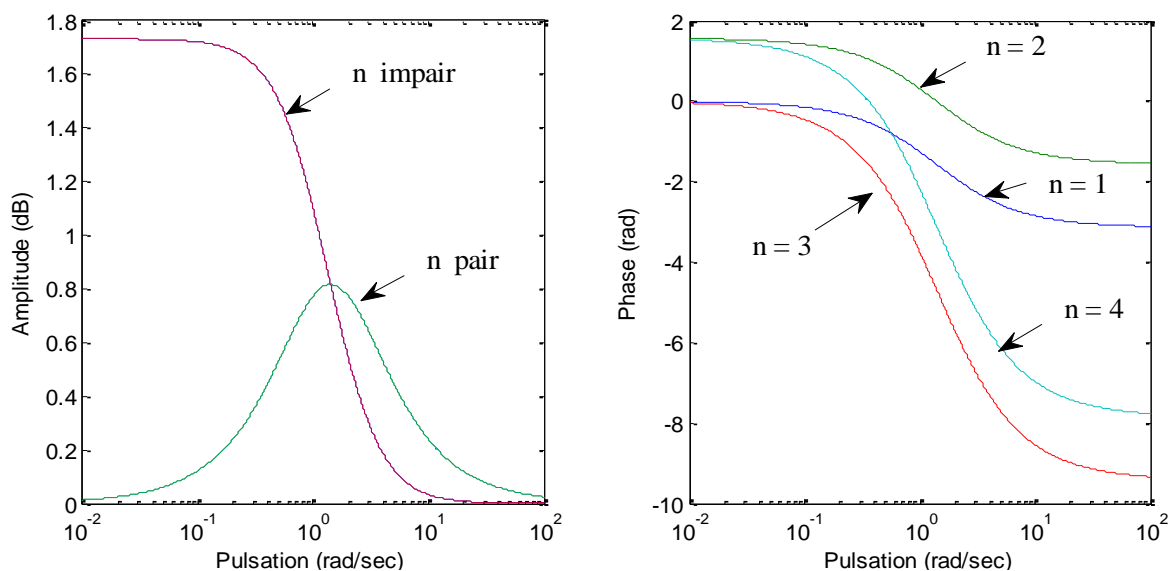
Figures II.7 et II.8 : $\psi_m(t)$ pour $\vec{\alpha} = \{1; 2\}$ ($m=1, 3$ ou 5 et $m=2, 4$ ou 6)



Figures II.9 et II.10 : $\psi_m(t)$ pour $\vec{\alpha} = \{1 \pm 5i\}$ ($m=1, 3$ ou 5 et $m=2, 4$ ou 6)

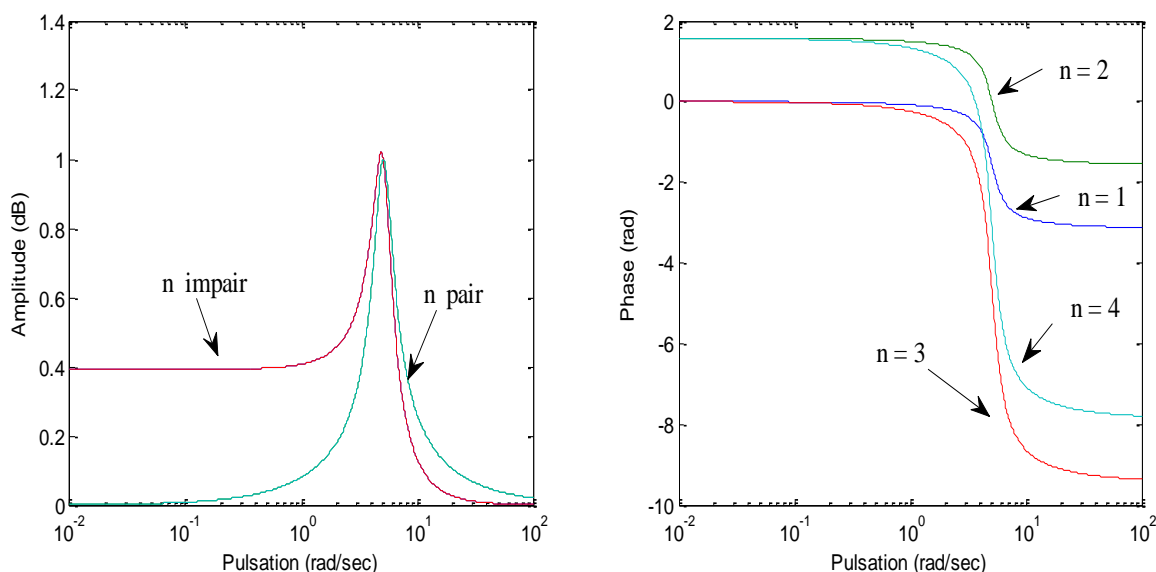
II.4.2.2. Représentation fréquentielle

A partir des transformées de Laplace II.5, nous pouvons exprimer dans le domaine fréquentiel leur module en dB et leur phase en radian. Sur les figures II.11 et II.12 nous représentons les courbes fréquentielles relatives aux 4 premières fonctions de Kautz pour différents jeux de pôles réels ou complexes conjugués. Les figures II.11 et II.12 représentent les réponses fréquentielles des quatre premières fonctions ($\hat{\psi}_1(s)$ à $\hat{\psi}_4(s)$) avec des pôles réels $\bar{\alpha} = \{1; 2\}$.



Figures II.11 et II.12 : Module et phase de $\hat{\psi}_1(s)$ à $\hat{\psi}_4(s)$ pour $\bar{\alpha} = \{1; 2\}$

Les figures II.13 et II.14 donnent les représentations fréquentielles des quatre premières fonctions de Kautz pour des pôles complexes conjugués $\bar{\alpha} = \{1 \pm 5i\}$.



Figures II.13 et II.14: Module et phase de $\hat{\psi}_1(s)$ à $\hat{\psi}_4(s)$ pour $\bar{\alpha} = \{1 \pm 5i\}$

Il y apparaît un comportement fréquentiel de type passe-bas pour toutes les fonctions de Kautz d'indice impair, et un comportement fréquentiel de type passe-bande pour toutes les fonctions de Kautz d'indice pair, vérifié aussi pour d'autres jeux de pôles (figure II.15). Nous constatons également que les modules des fonctions sont identiques quel que soit l'ordre n et ne dépendent que de la parité des indices.

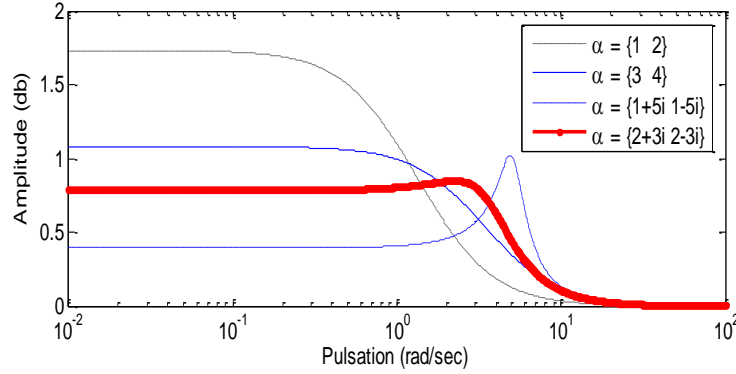


Figure II.15 : Module de $\hat{\psi}_1(s)$ pour différents jeux de pôles réels ou complexes conjugués

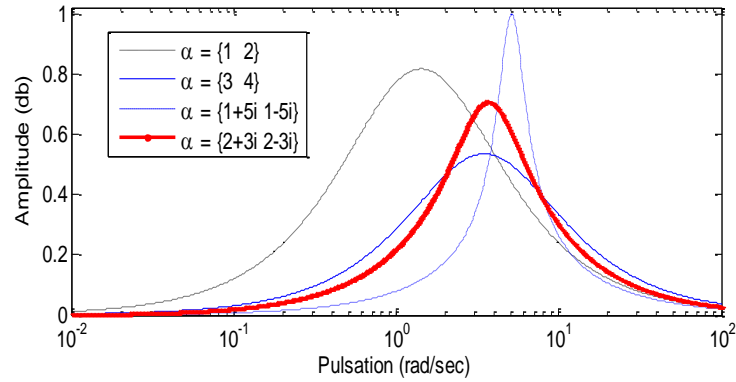


Figure II.16 : Module de $\hat{\psi}_2(s)$ pour différents jeux de pôles réels ou complexes conjugués

II.5. Représentation sur la base des fonctions de Müntz-Laguerre

Les fonctions de Müntz-Laguerre sont adaptées à la modélisation des systèmes présentant des réponses transitoires amorties. Nous présentons par la suite la projection sur la base de Müntz-Laguerre et l'expression des coefficients de cette projection. Toute fonction complexe $f \in L^2([0, \infty], C)$ admet une représentation de Müntz-Laguerre sous la forme

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t).$$

Cette expression correspond dans le domaine de Laplace à

$$\hat{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{\phi}_n(s). \quad (\text{II.6})$$

Les coefficients c_n , portent le nom de coefficients de Müntz-Laguerre et forment ce que nous appellerons un spectre de Müntz-Laguerre. Ils sont donnés par le produit scalaire

$$c_n = \langle f, \phi_n \rangle. \quad (\text{II.7})$$

Ces coefficients ont dans le cas général des valeurs complexes.

Pour des raisons pratiques évidentes, la représentation (II.6) est souvent tronquée à l'ordre N , un nombre fini de coefficients, ce qui se traduit par le modèle approché (II.8) pour $\hat{f}(s)$

$$\hat{g}(s) = \sum_{n=1}^N c_n \hat{\phi}_n(s) \approx \hat{f}(s). \quad (\text{II.8})$$

Le critère d'évaluation de nos modèles est le critère d'erreur quadratique. Il se prête très bien aux calculs que nous effectuons. L'erreur entre la fonction originale et la fonction obtenue suite à la troncature définie par

$$Eq = \|f - g\|^2 \quad (\text{II.9})$$

est minimale si les coefficients du développement c_n sont donnés par (II.7). L'erreur peut alors s'écrire $Eq = \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|^2$, cette expression nous fournit une mesure de la qualité de l'approximation II.8.

On définit également l'erreur quadratique relative $Eqr = \|f - g\|^2 / \|f\|^2$.

Il est à noter que l'erreur quadratique Eq dépend également du choix des paramètres des fonctions de Müntz-Laguerre. Ce choix a un impact d'autant plus important que le nombre N de fonctions utilisé pour le modèle est faible. Cette remarque est généralisable à la modélisation utilisant les bases de fonctions orthogonales généralisées (GOBF) à temps discret ou continu. L'obtention des paramètres optimaux pour ces bases de fonctions n'est pas un problème trivial, solvable simplement [Mal98], [Mal99], [Heu05].

II.5.1. Détermination des spectres de Müntz-Laguerre

Lorsqu'une fonction est connue par sa représentation temporelle, l'expression des coefficients de son spectre est donnée par (II.7). En pratique, ces produits scalaires pourront toujours être évalués avec la précision souhaitée au besoin par une approximation numérique des intégrales. Lorsqu'une fonction est définie par sa transformée de Laplace, et plus particulièrement si celle-ci est irrationnelle, la détermination de son spectre peut être laborieuse.

On cherche à calculer les coefficients de Müntz-Laguerre qui permettent de modéliser le système et déterminer le modèle rationnel approché. Les fonctions de Müntz-Laguerre sont construites à partir d'un jeu de R pôles choisis de manière arbitraire. Dans le cas général, une méthode numérique est nécessaire pour l'estimation des coefficients du spectre de Müntz-Laguerre. La méthode présentée s'inspire des travaux de A. Soumelidis et J. Bokor [Sou97], [Sou02], [Sou03] sur l'estimation des coefficients d'un développement sur la base de Takenaka-Malmquist. Les fonctions de Takenaka-Malmquist sont une version à temps discret des fonctions de Müntz-Laguerre. L'algorithme proposé par A. Soumelidis et J. Bokor utilise la FFT. Nous l'avons étudié et adapté pour permettre le calcul des spectres du développement sur la base des fonctions à temps continu de Müntz-Laguerre.

On cherche à calculer les coefficients c_n tels que

$$\hat{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{\phi}_n(s)$$

Comme les c_n sont donnés par les produits scalaires $c_n = \langle f, \phi_n \rangle$, on peut écrire dans le domaine de Laplace

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \hat{f}(s) \hat{\phi}_n^*(-s) ds \quad (\text{II.10})$$

Pour $s = j\omega$, l'expression devient

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(j\omega) \overline{\hat{\phi}_n(j\omega)} d\omega \quad (\text{II.11})$$

où la barre supérieure indique le conjugué (*) du terme. Les fonctions de Müntz-Laguerre

$$\hat{\phi}_n(s) = \frac{\sqrt{2\Re\{\alpha_n\}}}{s + \alpha_n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{s - \alpha_k^*}{s + \alpha_k} \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{II.12})$$

sont définies à l'aide de R pôles $\vec{\alpha} = \{\alpha_1; \dots; \alpha_R\}$ se répétant périodiquement à l'infini. On peut alors écrire

$$\hat{\phi}_{R\lambda+m}(s) = \hat{\phi}_m(s) \cdot [B(s)]^\lambda \quad (\text{II.13})$$

avec $\lambda = 0, 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots, R$ et

$$B(s) = \prod_{k=1}^R \left(\frac{s - \alpha_k^*}{s + \alpha_k} \right) = \prod_{k=1}^R B_{\alpha_k}(s) \quad (\text{II.14})$$

où $B_{\alpha_k}(s) = \frac{s - \alpha_k^*}{s + \alpha_k}$.

Etude du passe-tout $B_\alpha(s) = \frac{s - \alpha^*}{s + \alpha}$

Module

Pour $s = j\omega$, on vérifie que l'on a effectivement

$$|B_\alpha(j\omega)| = \left| \frac{j\omega - \alpha^*}{j\omega + \alpha} \right| = 1 \quad (\text{II.15})$$

Phase

L'expression de $B_\alpha(s)$ peut être décomposée en parties réelle et imaginaire. On pose $\alpha \triangleq \mu e^{j\gamma} = \mu(\cos \gamma + j \sin \gamma) = x + jy$. Les pôles des fonctions de Müntz-Laguerre sont dans le demi-plan gauche complexe, cela implique que l'ensemble des paramètres α appartiennent au demi-plan droit complexe et donc on aura $x > 0$ et $\mu > 0$ avec $\gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \text{Arg}(B_\alpha(j\omega)) &= \text{Arg}(j\omega - \alpha^*) - \text{Arg}(j\omega + \alpha) \\ &= \pi - 2 \text{Arc tan} \left(\frac{\omega + y}{x} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

On pourra donc écrire

$$B_\alpha(j\omega) = 1 \cdot e^{j\tau_\alpha(\omega)} \quad (\text{II.17})$$

avec

$$\tau_\alpha(\omega) = \text{Arg}(B_\alpha(j\omega)) = \pi - 2 \text{Arc tan} \left(\frac{\omega + y}{x} \right) \quad (\text{II.18})$$

Après étude, on constate que $\tau_\alpha(\omega)$ est une fonction réelle décroissante et bijective de $]-\infty, +\infty[$ vers $[0, 2\pi]$. En remplaçant (II.17) dans (II.14) avec $s = j\omega$, on obtient

$$B(j\omega) = \prod_{k=1}^R e^{j\tau_{\alpha_k}(\omega)},$$

donc $B(j\omega)$ peut s'écrire sous la forme

$$B(j\omega) = e^{j \sum_{k=1}^R \tau_{\alpha_k}(\omega)} = e^{jR\tau(\omega)} \quad (\text{II.19})$$

où l'on a posé

$$\tau(\omega) = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R \tau_{\alpha_k}(\omega).$$

Le terme $\tau(\omega)$ est également une fonction réelle décroissante bijective de $]-\infty, +\infty[$ vers $[0, 2\pi]$.

De l'étude précédente, on peut déduire en utilisant II.11, II.13 et II.19 que

$$\begin{aligned} c_{R\lambda+n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(j\omega) \overline{\hat{\phi}_n(j\omega)} [B(j\omega)]^\lambda d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(j\omega) \overline{\hat{\phi}_n(j\omega)} e^{-jR\tau(\omega)\lambda} d\omega \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Comme $\tau(\omega)$ est une bijection, on peut faire le changement de variable $\theta = \tau(\omega)$. C'est-à-dire $\omega = \tau^{-1}(\theta)$ et $d\omega = \rho(\theta) d\theta$ avec $\rho(\theta) = \frac{1}{\tau'(\tau^{-1}(\theta))} = \frac{1}{\tau'(\omega)}$. L'expression des coefficients du spectre est alors donnée par

$$c_{R\lambda+n} = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(j\tau^{-1}(\theta)) \overline{\hat{\phi}_n(j\tau^{-1}(\theta))} e^{-jR\lambda\theta} \rho(\theta) d\theta. \quad (\text{II.21})$$

En posant

$$F_n(\theta) = -\hat{f}(j\tau^{-1}(\theta)) \overline{\hat{\phi}_n(j\tau^{-1}(\theta))} \cdot \rho(\theta),$$

les coefficients sont donnés par

$$c_{R\lambda+n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_n(\theta) e^{-jR\lambda\theta} d\theta \quad (\text{II.22})$$

Cette intégrale s'apparente à une intégrale de Fourier. Une évaluation numérique de celle-ci pourra donc être faite en utilisant un algorithme de calcul de type FFT. En effet, on peut discrétiser l'intégrale en posant

$$\theta_i = \frac{2i+1}{2I} 2\pi \quad \text{avec } i = 0 \quad \text{à} \quad I-1 \quad \text{et} \quad \Delta\theta = \frac{1}{I} 2\pi.$$

Le calcul approché de l'intégrale devient

$$c_{R\lambda+n} \simeq \frac{\Delta\theta}{2\pi} \sum_{i=0}^{I-1} F_n(\theta_i) e^{-jR\lambda\theta_i} \quad (\text{II.23})$$

Donc, en remplaçant θ_i et $\Delta\theta$ par leurs expressions, on obtient

$$c_{R\lambda+n} \simeq \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} F_n(\theta_i) e^{-jR\lambda \frac{2i+1}{2I} 2\pi} \quad (\text{II.24})$$

ce qui peut s'écrire aussi

$$c_{R\lambda+n} \simeq \frac{1}{I} e^{-jR\lambda \frac{\pi}{I}} \sum_{i=0}^{I-1} F_n(\theta_i) e^{-jR\lambda \frac{i}{I} 2\pi} \quad (\text{II.25})$$

On remarque bien la similitude avec la transformée de Fourier discrète, ainsi les $c_{R\lambda+n}$ peuvent être facilement calculés à l'aide d'un algorithme rapide (FFT). En réalité on aura R FFT à calculer correspondant aux différentes valeurs $m = 1, \dots, R$.

II.6. Représentation sur la base des fonctions de Kautz

La modélisation d'une fonction $f(t)$ connue par sa transformée de Laplace $\hat{f}(s)$, à l'aide des fonctions $\hat{\psi}_{2m}(s)$ et $\hat{\psi}_{2m-1}(s)$ est donnée par

$$\hat{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{\psi}_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m-1} \hat{\psi}_{2m-1}(s) + \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} \hat{\psi}_{2m}(s) \quad (\text{II.26})$$

Les coefficients de la projection c_n , portent le nom de coefficients de Kautz et forment ce que nous appelons le spectre de Kautz. Les fonctions de Kautz sont réelles, le spectre de Kautz aura des valeurs réelles.

L'ensemble des fonctions de Kautz formant une base orthonormée, les coefficients sont donnés par

$$c_{2m} = \langle f, \psi_{2m} \rangle \text{ et } c_{2m-1} = \langle f, \psi_{2m-1} \rangle. \quad (\text{II.27})$$

Une approximation à l'ordre $N=2M$ de $\hat{f}(s)$ est donnée par

$$\hat{g}(s) = \sum_{m=1}^{2M} c_{2m} \hat{\psi}_{2m}(s) + \sum_{m=1}^{2M} c_{2m-1} \hat{\psi}_{2m-1}(s) \approx \hat{f}(s),$$

où les coefficients c_n sont optimaux au sens de la minimisation de l'erreur quadratique

$$Eq = \|f - g\|^2.$$

II.6.1. Détermination des spectres de Kautz

La détermination des spectres de Kautz suit la même logique que celle des spectres de Muntz-Laguerre. Dans ce paragraphe nous nous contentons donc d'énoncer les relations mathématiques spécifiques à la base des fonctions de Kautz sans reprendre la démarche de calcul.

On cherche à calculer les c_n tels que

$$\hat{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{\psi}_n(s) \quad (\text{II.28})$$

Les fonctions de Kautz $\hat{\psi}_n(s)$ s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{2m-1}(s) &= \frac{\sqrt{2\sigma_m\pi_m}}{s^2 + \sigma_m s + \pi_m} \prod_{k=1}^{m-1} \left(\frac{s^2 - \sigma_k s + \pi_k}{s^2 + \sigma_k s + \pi_k} \right), \quad m=1,2,3,\dots \\ \hat{\psi}_{2m}(s) &= \frac{\sqrt{2\sigma_m} s}{s^2 + \sigma_m s + \pi_m} \prod_{k=1}^{m-1} \left(\frac{s^2 - \sigma_k s + \pi_k}{s^2 + \sigma_k s + \pi_k} \right), \quad m=1,2,3,\dots\end{aligned}\quad (\text{II.29})$$

Lorsque l'on choisit un jeu de R pôles $\vec{\alpha} = \{\alpha_1; \dots; \alpha_R\}$ se répétant à l'infini pour définir les fonctions de Kautz, on peut écrire

$$\hat{\psi}_{R\lambda+n}(s) = \hat{\psi}_n(s) [B(s)]^\lambda \quad (\text{II.30})$$

avec $B(s) = \prod_{k=1}^R \frac{s - \alpha_k^*}{s + \alpha_k}$, $\lambda = 0,1,2,\dots$ et $n = 1,2,3,\dots$. Notons que dans ce cas R est pair.

On remarque que les relations (II.30) et (II.13) sont similaires, le calcul des coefficients du spectre de Kautz pourra donc se faire en suivant la même procédure que celle utilisée pour le calcul du spectre de Müntz-Laguerre. On peut effectivement écrire

$$c_{R\lambda+n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_n(\theta) e^{-jR\lambda\theta} d\theta. \quad (\text{II.31})$$

avec cette fois

$$F_n(\theta) = -\hat{f}(j\tau^{-1}(\theta)) \overline{\hat{\psi}_n(j\tau^{-1}(\theta))} \cdot \rho(\theta)$$

L'approximation des coefficients est donnée par

$$c_{R\lambda+n} \simeq \frac{1}{I} e^{-jR\lambda \frac{\pi}{I}} \sum_{i=0}^{I-1} F_n(\theta_i) e^{-jR\lambda \frac{i}{I} 2\pi} \quad (\text{II.32})$$

où $\theta_i = \frac{2i+1}{2I} 2\pi$ et $i = 0$ à $I-1$, et peut également être facilement calculée à l'aide d'un algorithme rapide (FFT).

II.7. Exemples de modélisation

Afin d'illustrer l'emploi des fonctions de Müntz-Laguerre et de Kautz en modélisation et de valider le bon comportement numérique de la méthode, nous allons considérer quelques exemples extraits de la littérature pour lesquels les fonctions sont connues par leur transformée de Laplace $\hat{f}(s)$ et pour lesquels nous cherchons un modèle approché temporel et/ou fréquentiel. L'implémentation des outils a été réalisée à l'aide du logiciel Matlab.

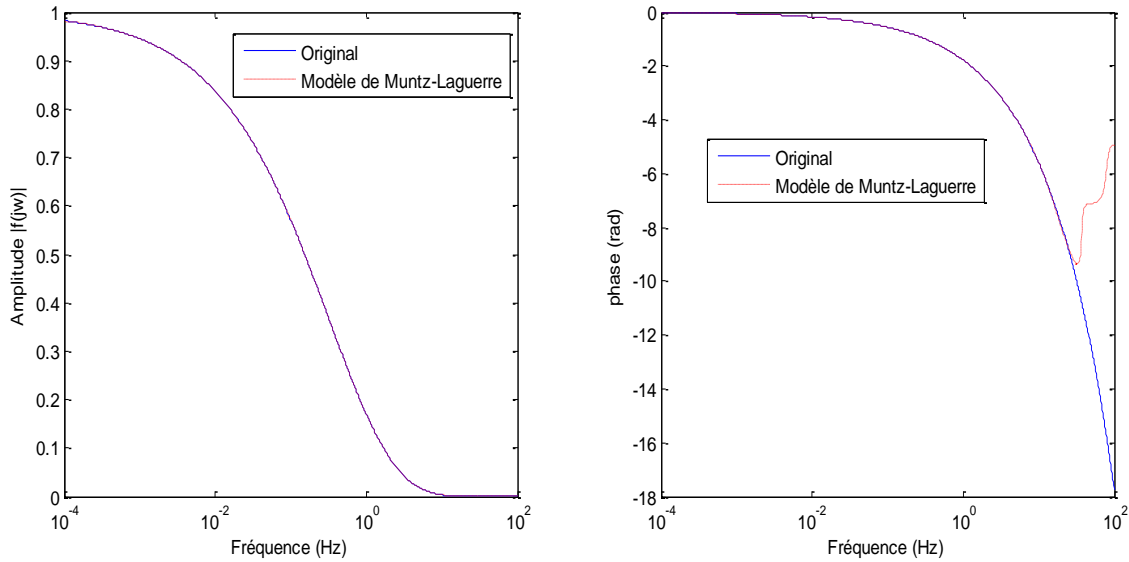
II.7.1. Exemple d'un câble sous-marin

Nous considérons la fonction de transfert approchée d'un câble de transmission sous-marin donnée dans le domaine de la transformée de Laplace par l'expression [Hsu90]

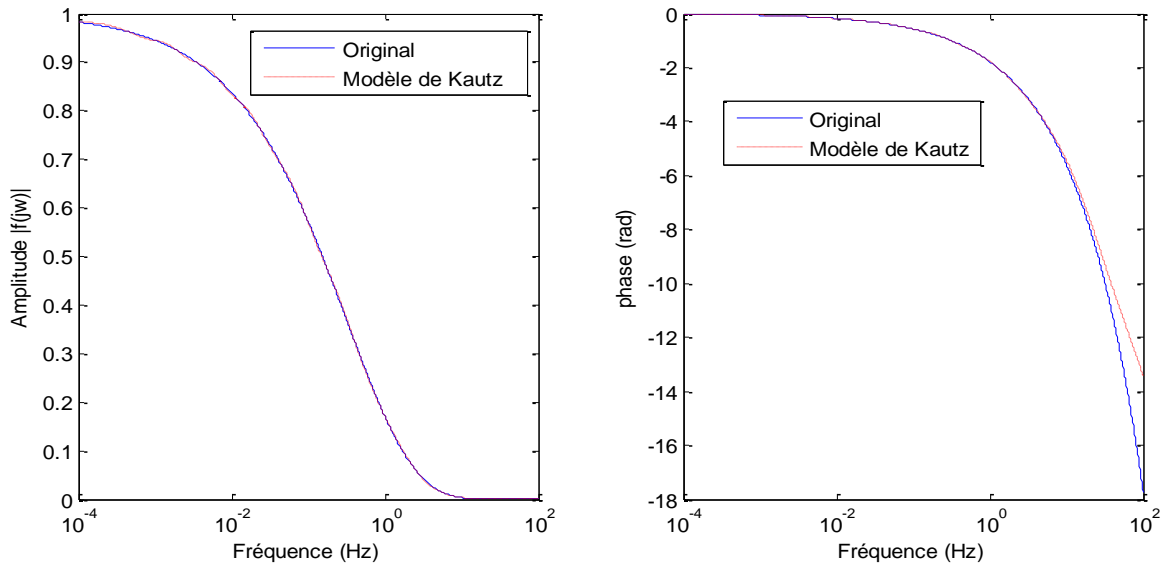
$$\hat{f}(s) = e^{-\sqrt{K}s}.$$

Cette expression fait notamment apparaître les effets de peau pour le câble. Sans perte de généralité, nous prendrons $K = 1$.

Nous pouvons déterminer les spectres de Müntz-Laguerre et de Kautz de l'approximation $g(t) \approx f(t)$ à l'aide de $N = 20$ coefficients et pour $I = 1024$ points de calcul pour la FFT. Les pôles des fonctions de Müntz-Laguerre et de Kautz sont choisis de manière arbitraire, réels et sont donnés par $\vec{\alpha} = \{10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10, 10^2, 10^3\}$. Nous traçons figures II.17 à II.20, les réponses fréquentielles du système original $\hat{f}(s)$ et les réponses des modèles approchés $\hat{g}(s)$ réalisés à l'aide des fonctions de Müntz-Laguerre et de Kautz.



Figures II. 17 et II.18 : Réponses fréquentielles (module et phase) de $\hat{f}(s)$ et de son modèle de Müntz-Laguerre



Figures II.19 et II.20 : Réponses fréquentielles (module et phase) de $\hat{f}(s)$ et de son modèle de Kautz

Les figures II.17 à II.20 permettent une comparaison de réponses fréquentielles des modèles de Müntz-Laguerre et Kautz. Les premiers résultats nous permettent de constater une quasi-superposition des réponses fréquentielles pour seulement $N = 20$ coefficients. On mesure l'erreur quadratique relative définie par $Eqr = \|f - g\|^2 / \|f\|^2$, elle vaut pour le modèle de

Kautz $Eqr = 2,01.10^{-4}$, et pour celui de Müntz-Laguerre $Eqr = 2,01.10^{-4}$, confirmant la qualité de ces modèles.

La modélisation de $f(t)$ par les fonctions de Müntz-Laguerre ou de Kautz permet également un calcul approché de la réponse impulsionnelle dont l'expression littérale est connue [Hsu90]

$$f(t) = \frac{1}{2K\sqrt{\pi}} \left(\frac{K}{t} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{K}{4t}} \quad \text{pour } t > 0.$$

La figure II.21, représente la réponse impulsionnelle modélisée par les fonctions de Kautz $g(t)$. Elle est comparée à la réponse impulsionnelle originale du câble $f(t)$.

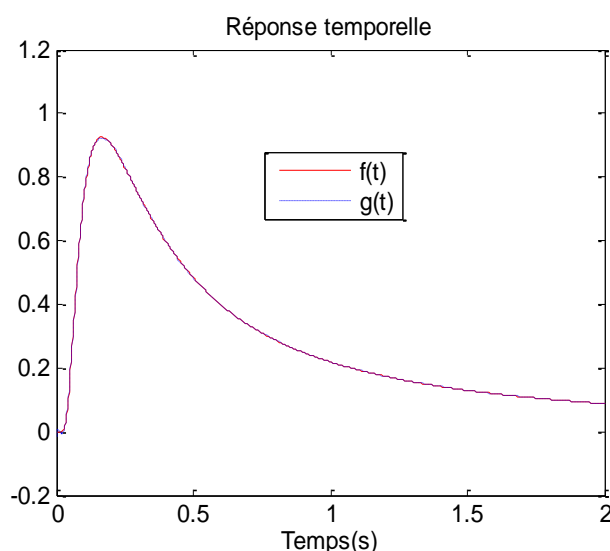


Figure II.21 : Réponse impulsionnelle $f(t)$ et son modèle de Kautz approché $g(t)$

II.7.2. Exemple d'un circuit à ligne RC

Le second exemple choisi pour illustrer la méthode est un classique de la littérature, il s'agit d'un circuit RC distribué (figure II.22), système irrationnel proposé par Johnson et Huelsman [Joh70] pour lequel $R=R_1=R_2$, $C=C_1$, $RC=1$ et $K=1$.

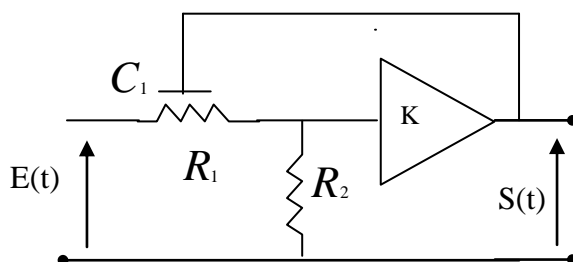


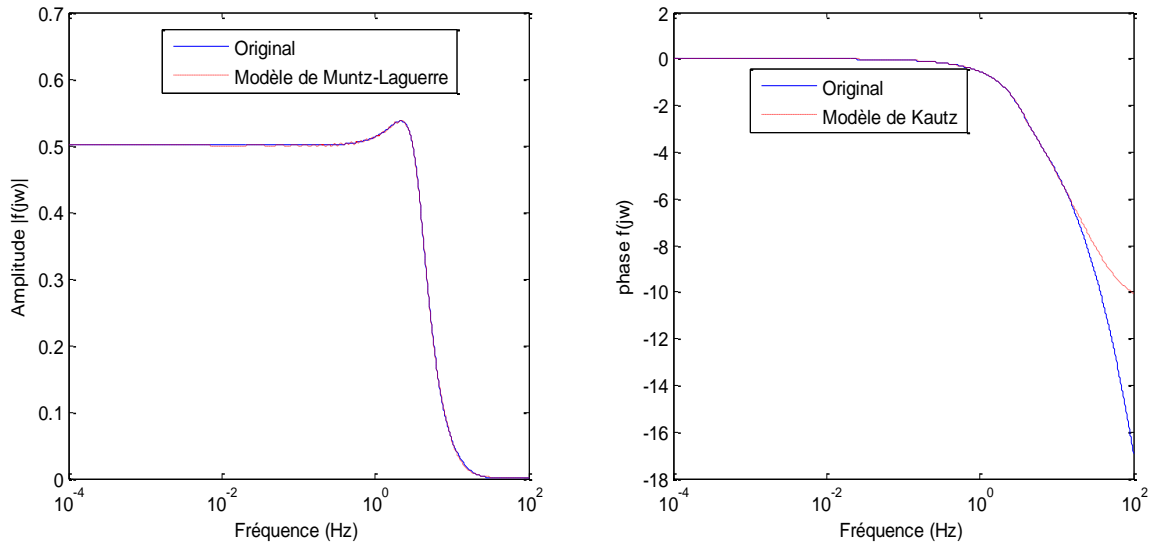
Figure II.22 : Schéma d'un circuit RC distribué

La fonction de transfert irrationnelle s'écrit sous la forme

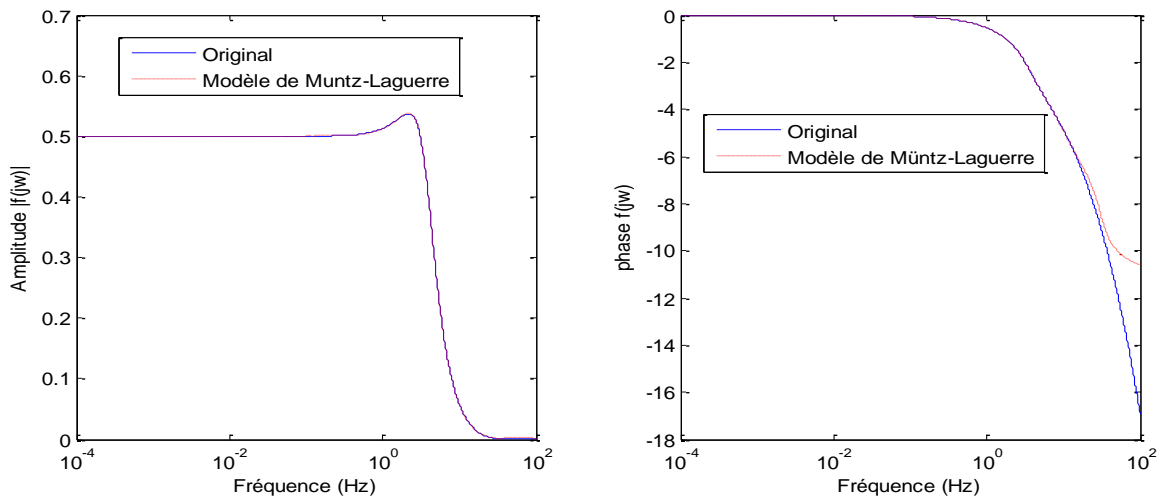
$$\hat{f}(s) = \frac{1}{1 + \frac{\sinh(\sqrt{RC}s)}{\sqrt{RC}s}}.$$

Nous calculons les modèles de Müntz-Laguerre et de Kautz du système pour une troncature des bases à $N = 50$. Le jeu de pôles réels utilisé pour les fonctions de Müntz-Laguerre et de Kautz est $\tilde{\alpha} = \{1; 3; 4; 5; 7; 8\}$.

Les figures II.23 à II.26 donnent la représentation de la réponse fréquentielle du système original et les réponses des modèles approchés de Müntz-Laguerre et Kautz.



Figures II.23 et II.24 : Réponses fréquentielles (modules et phases) de $\hat{f}(s)$ et de son modèle de Kautz



Figures II.25 et II.26 : Réponses fréquentielles (module et phase) de $\hat{f}(s)$ et de son modèle de Müntz-Laguerre

On constate une très bonne qualité de la modélisation, les réponses fréquentielles sont quasi-superposées et ceci sur une large gamme de fréquence. L'erreur quadratique relative vaut

$E_{qr} = 2,02.10^{-4}$ pour le modèle de Kautz et $E_{qr} = 2,02.10^{-4}$ pour le modèle de Müntz-Laguerre.

Coefficients	$N = 20$	$N = 50$	$N = 80$	$N = 100$	$N = 200$	$N = 400$
E_{qr} via Kautz	$4,10.10^{-3}$	$2,02.10^{-4}$	$5,53.10^{-5}$	$1,03.10^{-5}$	$3,39.10^{-7}$	$5,01.10^{-10}$
E_{qr} via Müntz- Laguerre	$4,10.10^{-3}$	$2,02.10^{-4}$	$5,53.10^{-5}$	$1,03.10^{-5}$	$3,39.10^{-7}$	$5,01.10^{-10}$

Tableau II.1 : Erreurs quadratiques relatives estimées pour différentes valeur de N

Dans le tableau sont données les erreurs de troncature pour différentes valeur de N , obtenu avec les deux modèles avec le même vecteur de paramètres initiaux. On voit bien lorsque le nombre de fonctions N augmente l'erreur est plus faible. Et on peut obtenir des modèles de départ de bonne qualité qui vont nous servir pour la phase la réduction d'ordre.

II.7.3. Exemple d'une ligne de transmission

Pour la modélisation d'une ligne d'interconnexion, nous choisissons l'exemple de Chen et Friedman [Che05], correspondant à la structure de la figure II.27.

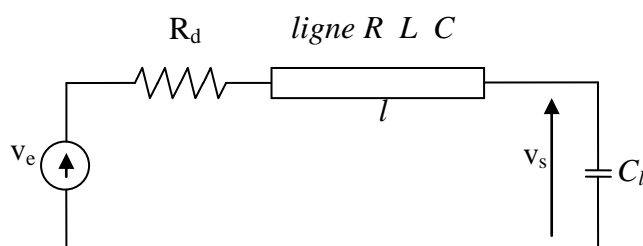


Figure II.27 : Ligne d'interconnexion avec une charge capacitive

La fonction de transfert de ce circuit est

$$\hat{f}(s) = \frac{v_s(s)}{v_e(s)} = \frac{1}{(1 + R_d C_l s) \cosh \theta + (R_d / Z_c + Z_c C_l s) \sinh \theta}$$

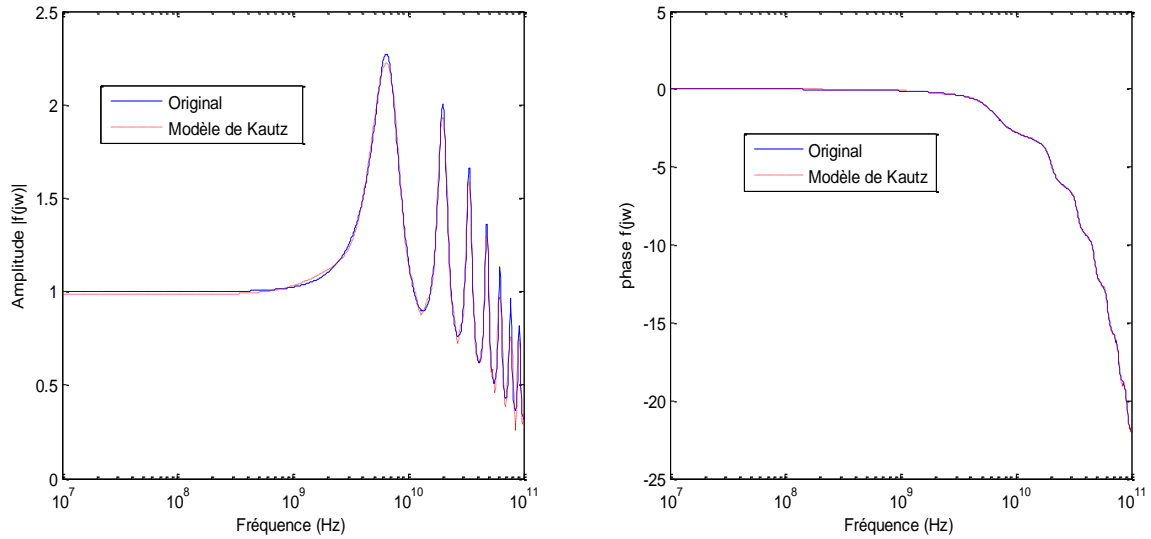
avec $\theta = l\sqrt{(R + sL)sC}$ et $Z_c = \sqrt{(R + sL)/sC}$. $R = 8829 \Omega/m$, $L = 1.538 \mu H/m$ et $C = 180 pF/m$ désignent les paramètres linéiques, $l = 2 mm$ représente la longueur de la ligne, $R_d = 30 \Omega$ la résistance du générateur et $C_l = 50 fF$ la capacité de charge.

Sur les figures II.28 à II.31, nous comparons les réponses fréquentielles du modèle original de la ligne et celles des modèles de Müntz-Laguerre et de Kautz obtenues avec $N = 60$ coefficients et le jeu de pôles

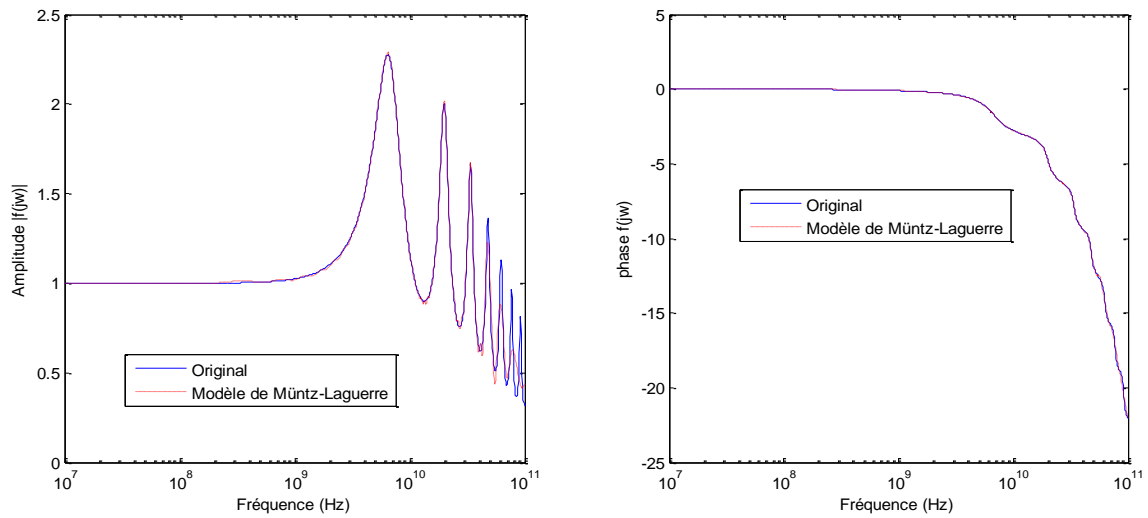
$$\tilde{\alpha} = \{0,69 \pm i 0,53; 0,63 \pm i 1,74; 0,72 \pm i 3,2; 1,11 \pm i 5,86; 1,26 \pm i 11,3\}.$$

Pour cet exemple, un facteur d'échelle de $\eta = 10^{-11}$ a été utilisé pour normaliser les fréquences. Ce facteur d'échelle permet d'éviter des problèmes numériques liés à des valeurs de pôles très grandes ou très petites.

La méthode de calcul des spectres de Müntz-Laguerre et de Kautz montre ici sa robustesse numérique puisque avec 10 pôles différents bien choisis, nous obtenons une très bonne modélisation de $\hat{f}(s)$.



Figures II.28 et II.29 : Réponses fréquentielles (module et phase) de $\hat{f}(s)$ et de son modèle de Kautz



Figures II.30 et II.31 : Réponses fréquentielles (module et phase) de $\hat{f}(s)$ et de son modèle de Müntz-Laguerre

Nous pouvons observer figures II.28 à II.31 que les réponses fréquentielles de Müntz-Laguerre et de Kautz suivent fidèlement les pics des fréquences de résonance de $\hat{f}(s)$ sur toute la plage de fréquence. L'erreur quadratique relative vaut $Eqr = 6,20 \cdot 10^{-2}$ pour le

modèle de Müntz-Laguerre et $E_{qr} = 6,20.10^{-2}$ pour le modèle de Kautz. Ces résultats montrent que les fonctions de Müntz-Laguerre et de Kautz sont aussi appropriées pour modéliser des systèmes fortement oscillants.

Nous nous intéressons au travers de cet exemple aux effets de la troncature des séries à différents ordres N . La tableau II.1 fournit les résultats d'erreurs quadratiques relatives, (E_{qr}) obtenues entre les modèles de Müntz-Laguerre et Kautz et le modèle original tronquées à $N = 40$, $N = 100$, $N = 200$.

Coefficients	$N = 40$	$N = 100$	$N = 200$
L'erreur quadratique via ML	$1,20.10^{-1}$	$4,30.10^{-2}$	$2,17.10^{-2}$
L'erreur quadratique via Kautz	$1,20.10^{-1}$	$4,30.10^{-2}$	$2,17.10^{-2}$

Tableau II.2 : Erreurs quadratiques relatives estimées pour différentes valeur de N

Nous constatons que plus grand est le nombre de coefficients, plus faible est l'erreur d'approximation. Conformément à la théorie, la modélisation s'améliore quand le nombre de coefficients augmente.

II.8. Conclusion

Dans ce second chapitre, nous avons présenté les fonctions de Müntz-Laguerre et de Kautz et fait un rappel de quelques-unes de leurs propriétés élémentaires. Une méthode originale robuste et précise permettant le calcul efficace des spectres de Müntz-Laguerre et de Kautz a été développée.

A l'aide de quelques exemples, nous avons illustré l'approximation d'un système original d'ordre infini ou élevé par un modèle construit à l'aide de ces fonctions orthogonales. Les résultats obtenus sont très satisfaisants, ils montrent que cette approche conduit à une bonne modélisation des réponses impulsionnelle et fréquentielle des systèmes. La méthode permet, si besoin, le calcul d'un grand nombre de coefficients du spectre pour atteindre la qualité d'approximation désirée.

La modélisation est une étape de préparation pour la réduction de modèle car les modèles de Kautz et de Müntz-Laguerre ainsi obtenus, sont souvent d'un ordre encore trop élevé. Le choix des paramètres définissant les fonctions de base est crucial pour obtenir des modèles d'ordre faible. Le chapitre suivant sera consacré à la réduction d'ordre des modèles.

Chapitre III : Réduction d'ordre des modèles

III.1. Introduction

En raison des progrès rapides des technologies de la complexité grandissante des systèmes..., l'électronicien est de plus en plus amené à traiter des systèmes de grandes dimensions. Les méthodes utilisées pour étudier de tels systèmes nécessitent la détermination de modèles plus simples, approchant le comportement des systèmes de très grande complexité. Cette simplification est appelée la réduction d'ordre de modèles.

Les outils de réduction d'ordre de modèles sont d'un grand intérêt lorsque l'on cherche à obtenir des modèles rationnels d'une grande compacité. En particulier on attend d'un tel modèle qu'il reflète les principales propriétés du système initial comme par exemple la stabilité ou la passivité. Enfin on espère avoir un comportement entrée-sortie aussi fidèle que possible, pour une classe d'entrées assez large.

Notre groupe de recherche a mené de nombreuses études sur le sujet et a développé plusieurs méthodes de réduction d'ordre de modèles, basées principalement sur des fonctions orthogonales, telles la méthode de « Laguerre-Gram à 1 paramètre » [Amg05] et la méthode de « Kautz-Gram à 2 paramètres » [Tel07]. Ces méthodes souffrent parfois d'un défaut de précision lorsque les systèmes considérés font apparaître de nombreuses constantes de temps ou fréquences de résonances. Pour ces raisons, elles sont également moins adaptées à la modélisation de systèmes comportant de nombreuses entrées-sorties.

Un réseau de connexions peut avoir une structure à géométrie complexe. C'est un multipôle dont le nombre d'entrées et de sorties peut être important, et pour lequel les fonctions de transfert sont généralement d'ordre très élevé ou irrationnelles. L'utilisation de fonctions de Kautz ou de fonctions de Müntz-Laguerre devrait permettre de mieux représenter ces multipôles. Afin de traiter ce type de systèmes, de nouvelles techniques doivent donc être élaborées, c'est l'objectif de cette thèse.

Dans ce chapitre, nous présentons un nouvel outil mathématique de réduction de modèles, développé durant cette thèse. Il réalise un compromis avantageux des méthodes exposées dans le premier chapitre et représente une avancée qui répond à des problèmes spécifiques tels que la modélisation des systèmes de grandes dimensions avec de fortes résonances. Au cours de ce chapitre, nous décrivons le principe général de cette technique utilisant deux bases de fonctions orthogonales. La première approche repose sur l'utilisation des fonctions orthogonales complexes de Müntz-Laguerre qui servent surtout à présenter de manière générale (et plus abordable) l'algorithme développé. Hélas, cette technique fournit un modèle à coefficients complexes peu pratique pour les applications visées. La deuxième approche, certes plus délicate à présenter, permet de corriger cela en fournissant un modèle réduit à coefficients réels. Elle est basée sur l'utilisation des fonctions orthogonales réelles de Kautz. Des exemples sont présentés dans la deuxième partie de ce chapitre afin de dégager les enjeux de cette approche. Plusieurs critères sont utilisés pour mesurer la qualité des modèles réduits. Enfin, nous donnons un bref aperçu de la procédure à suivre pour adapter les méthodes aux systèmes MIMO.

III.2. Méthodes de réduction d'ordre

Lorsque les systèmes à modéliser sont de grandes dimensions, les calculs peuvent être délicats. L'utilisation de modèles intermédiaires, tels que les modèles de Müntz-Laguerre ou de Kautz, peut permettre de contourner ces problèmes. Les études effectuées dans le cadre de cette thèse nous ont permis de développer une nouvelle approche de réduction d'ordre. Cette approche a fait l'objet de différentes communications [Ias09], [Ias10] et [Lor10].

III.2.1. Formulation du problème de réduction

Considérons $\hat{f}(s)$, la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, pouvant correspondre par exemple à la réponse impulsionnelle ou indicielle d'un système.

L'objectif final est de chercher à approcher la fonction de transfert $\hat{f}(s)$ par un modèle rationnel $\hat{h}(s)$ d'ordre réduit

$$\hat{h}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (\text{III.1})$$

tel que l'énergie de l'erreur $\left\| \hat{f}(s) - \frac{P(s)}{Q(s)} \right\|^2$ soit minimale.

La recherche d'une fonction rationnelle $\hat{h}(s)$ d'ordre faible, et telle que $\hat{f}(s) \approx \hat{h}(s)$, est un problème non linéaire vis-à-vis des coefficients du dénominateur $Q(s)$. Il ne peut pas être résolu simplement.

Le problème non linéaire $\left\| \hat{f}(s) - \frac{P(s)}{Q(s)} \right\|^2$ à résoudre est transformé selon Kalman en un problème linéaire sous la forme

$$\|\varepsilon\|^2 = \|Q(s)\hat{f}(s) - P(s)\|^2 \quad (\text{III.2})$$

avec $Q(s)$ et $P(s)$ des polynômes ou des fractions rationnelles de la variable s .

Il existe différentes méthodes basées sur cette linéarisation. Pour situer notre travail, dans cette section nous présentons un rappel de trois méthodes de réduction de modèles développées au laboratoire et basées sur cette linéarisation.

III.2.2. Méthodes antérieures

III.2.2.1. Méthode des dérivées successives

La première méthode de réduction dite «des dérivées» a été développée il y a quelques années au sein du laboratoire [Sev93]. Elle fournit un modèle réduit d'ordre R . Son principe est basé sur l'utilisation de l'opérateur de dérivation. A partir de $f(t)$, on construit un ensemble de fonctions constitué des R dérivées successives de $f(t)$:

$$\begin{aligned} f_0(t) &= f(t), \\ f_k(t) &= \frac{df_{k-1}(t)}{dt}, \quad k = 1, \dots, R. \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Une propriété intéressante de l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$ est qu'il conserve les pôles de la fonction de transfert associée à $f(t)$. Pour le démontrer, il suffit de traduire les relations temporelles précédentes dans le domaine de Laplace

$$\begin{aligned} \hat{f}_0(s) &= \hat{f}(s) \\ \hat{f}_k(s) &= s \hat{f}_{k-1}(s) - f_{k-1}(0), \quad k = 1, \dots, R \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

avec $f_{k-1}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{f}_{k-1}(s)$.

Si $\hat{f}(s)$ est une fraction rationnelle, alors de proche en proche on déduit que toutes les fonctions $\hat{f}_k(s)$ ont le même dénominateur que $\hat{f}(s)$.

D'après (III.4), la combinaison linéaire des $R+1$ fonctions de l'ensemble $\Omega_R = \{\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_R\}$ peut se mettre sous la forme

$$\sum_{k=0}^R q_k \hat{f}_k(s) = Q(s) \hat{f}(s) - P(s) \quad (\text{III.5})$$

avec $Q(s) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots + q_R s^R$ et $P(s)$ un polynôme de degré $R-1$ dépendant des

q_k et des $f_k(0)$. La minimisation de l'énergie $\left\| \sum_{k=0}^R q_k \hat{f}_k(s) \right\|^2$ par rapport aux coefficients q_k

(en ayant posé $q_R = 1$) permet alors de déduire un modèle réduit d'ordre R de $\hat{f}(s)$ sous la forme $\hat{h}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$.

Il a été montré [Sev93] que les modèles réduits obtenus par cette méthode sont stables par construction. Il est à noter également que le modèle réduit $\hat{h}(s)$ permet de conserver la valeur initiale et les $R-1$ premières dérivées de $f(t)$ à $t = 0$,

$$\left. \frac{d^k h(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = \left. \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right|_{t=0}, \quad \text{pour } k = 0, \dots, R-1. \quad (\text{III.6})$$

III.2.2.2. Méthode des intégrales successives

Une extension de la méthode précédente, basée sur l'utilisation des intégrales, dite «méthode des intégrales» a été également mise au point au début des années 90 [Sev93]. Elle fournit un modèle réduit d'ordre R . A partir de $f(t)$, on construit un ensemble de fonctions constitué des R intégrales successives de $f(t)$:

$$\begin{aligned} f_0(t) &= f(t), \\ f_k(t) &= - \int_t^{+\infty} f_{k-1}(\tau) d\tau, \quad k = 1, \dots, R. \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

L'opérateur d'intégration \int possède aussi la propriété de conserver les pôles de $\hat{f}(s)$. Pour le démontrer, il suffit de traduire les relations temporelles précédentes dans le domaine de Laplace, cela correspond aux opérations de division par s

$$\begin{aligned}\hat{f}_0(s) &= \hat{f}(s), \\ \hat{f}_k(s) &= \frac{1}{s} \hat{f}_{k-1}(s) - \frac{1}{s} \hat{f}_{k-1}(0), \quad k=1, \dots, R.\end{aligned}\tag{III.8}$$

avec $\hat{f}_{k-1}(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \hat{f}_{k-1}(s)$.

Si $\hat{f}(s)$ est une fraction rationnelle, alors de proche en proche on déduit que toutes les fonctions $\hat{f}_k(s)$ ont le même dénominateur que $\hat{f}(s)$.

D'après (III.8), la combinaison linéaire des $R+1$ fonctions de l'ensemble $\Omega_R = \{\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_R\}$ peut également se mettre sous la forme

$$\sum_{k=0}^R q_k \hat{f}_k(s) = Q(s) \hat{f}(s) - P(s),$$

avec cette fois $Q(s) = q_0 + \frac{q_1}{s} + \frac{q_2}{s^2} + \dots + \frac{q_R}{s^R}$ et $P(s)$ un polynôme en $\frac{1}{s}$ de degré R

dépendant des q_k et des $\hat{f}_k(0)$. La minimisation de l'énergie $\left\| \sum_{k=0}^R q_k \hat{f}_k(s) \right\|^2$ par rapport aux coefficients q_k (avec $q_R = 1$) permet alors de déduire un modèle réduit rationnel, d'ordre R , de $\hat{f}(s)$ sous la forme $\hat{h}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$.

Il a été montré aussi que les modèles réduits obtenus par cette méthode des intégrales sont stables par construction [Sev93]. Le modèle réduit $\hat{h}(s)$ conserve la valeur des R premières intégrales successives de $f(t)$,

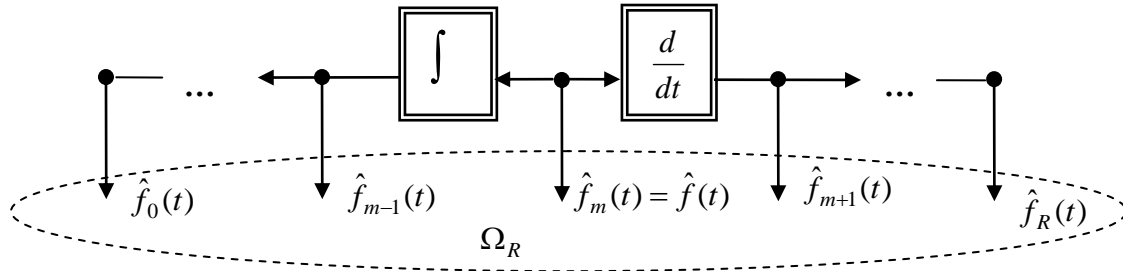
$$\underbrace{\int_t^{+\infty} \dots \int_t^{+\infty} h(t) dt \dots dt}_{k \text{ fois}} = \underbrace{\int_t^{+\infty} \dots \int_t^{+\infty} f(t) dt \dots dt}_{k \text{ fois}} \quad \text{pour } k=1, \dots, R.\tag{III.9}$$

A noter qu'il est également possible de combiner l'utilisation des deux opérateurs dérivée et intégrale pour constituer l'ensemble $\Omega_R = \{\hat{f}_0, \dots, \hat{f}_m, \dots, \hat{f}_R\}$.

L'opérateur est défini par

$$\begin{aligned}\hat{f}_m(s) &= \hat{f}(s) \\ \hat{f}_k(s) &= s \hat{f}_{k-1}(s) - \hat{f}_{k-1}(0) \quad k=m+1, \dots, R \\ \hat{f}_k(s) &= \frac{1}{s} \hat{f}_{k+1}(s) - \frac{1}{s} \hat{f}_{k+1}(0), \quad k=m-1, \dots, 0\end{aligned}\tag{III.10}$$

où m peut être choisi tel que $0 \leq m \leq R$ (figure III.1). Cette méthode permet également d'obtenir un modèle réduit d'ordre R , garanti stable par construction [Sev93].


 Figure III.1 : Principe de construction de l'ensemble Ω_R .

La difficulté de la méthode, particulièrement lorsque $\hat{f}(s)$ est irrationnelle, peut résider dans le calcul des produits scalaires, $\gamma_{u,k} \triangleq \langle f_u, f_k \rangle$ nécessaires à la construction du modèle réduit, $\gamma_{u,k}$ éléments de la matrice de Gram que nous allons aborder dans la suite de ce document. Dans [Tan05] un algorithme intéressant, a été développé. Il consiste à calculer une première approximation rationnelle de $\hat{f}(s)$ via les fonctions de Laguerre. Une alternative utilisant les fonctions de Kautz a également été proposée dans [Tel07b].

III.2.2.3. Méthode de Laguerre-Gram

Cette méthode [Amg05], est basée sur un opérateur adapté aux fonctions de Laguerre. Un opérateur noté Λ_α est défini par

$$\begin{aligned} \hat{f}_0(s) &= \hat{f}(s), \\ \hat{f}_k(s) &= \Lambda_\alpha \hat{f}_{k-1}(s) = \frac{s+\alpha}{s-\alpha} \left[\hat{f}_{k-1}(s) - \frac{2\alpha}{s+\alpha} \hat{f}_{k-1}(\alpha) \right] \quad k=1, \dots, R. \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Si $\hat{f}(s)$ est une fraction rationnelle, alors de proche en proche on peut aisément vérifier que toutes les fonctions $\hat{f}_k(s)$ ont le même dénominateur que $\hat{f}(s)$.

En utilisant la représentation de $\hat{f}(s)$ sur la base des fonctions de Laguerre

$$\hat{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{\phi}_n(s) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{s+\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{s-\alpha}{s+\alpha} \right)^{n-1},$$

les fonctions $\hat{f}_k(s)$ peuvent alors s'exprimer à partir de $\hat{f}(s)$ par

$$\hat{f}_k(s) = \left(\frac{s+\alpha}{s-\alpha} \right)^k \left[\hat{f}(s) - \sum_{n=1}^k c_n \hat{\phi}_n(s) \right], \quad k=1, \dots, R \quad (\text{III.12})$$

D'après (3.12), la combinaison linéaire des $R+1$ fonctions de l'ensemble $\Omega_R = \{\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_R\}$ peut se mettre sous la forme

$$\sum_{k=0}^R q_k \hat{f}_k(s) = Q(s) \hat{f}(s) - P(s).$$

L'expression de $Q(s)$ est alors donnée par

$$Q(s) = q_0 + q_1 \frac{s+\alpha}{s-\alpha} + q_2 \left(\frac{s+\alpha}{s-\alpha} \right)^2 + \dots + q_R \left(\frac{s+\alpha}{s-\alpha} \right)^R \quad (\text{III.13})$$

et $P(s)$ est une fraction rationnelle en s dépendant des q_k et des premiers coefficients c_n constituant le spectre de Laguerre de $\hat{f}(s)$. L'approximation au sens des moindres carrés de la fonction $\hat{f}_R(s)$ à l'aide du sous-ensemble $\Omega_{R-1} = \{\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{R-1}\}$ se résout par la minimisation de l'énergie $\left\| \sum_{k=0}^R q_k \hat{f}_k(s) \right\|^2$ par rapport aux coefficients q_k (avec $q_R = 1$). On déduit alors un

modèle réduit d'ordre R de $\hat{f}(s)$ sous la forme $\hat{h}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$.

Les modèles réduits obtenus par cette méthode sont, comme les précédents, stables par construction [Amg05]. Le modèle réduit $\hat{h}(s)$ conserve la valeur des R premiers coefficients c_n du spectre de Laguerre de $\hat{f}(s)$. De plus le calcul des produits scalaires nécessaires à la détermination du modèle réduit s'effectue très aisément à l'aide des coefficients du spectre de Laguerre de $\hat{f}(s)$.

III.2.3. Méthode de réduction développée durant la thèse

Après avoir testé l'efficacité de la méthode de Laguerre-Gram, nous cherchons à réaliser des outils de réduction de modèle similaires, basés cette fois sur l'utilisation des fonctions de Müntz-Laguerre ou de Kautz, et plus appropriés dans le cas de la modélisation des systèmes résonants et de plus grande dimension. Nous dénoterons respectivement ces outils de réduction MLOR (Müntz-Laguerre based Order Reduction) et KOR (Kautz based Order Reduction).

Nous décrivons dans la section III.3, le principe général de la technique de réduction d'ordre de modèle développée durant la thèse. L'outil utilisant les fonctions orthogonales de Müntz-Laguerre fournit un modèle réduit à coefficients complexes mais permet surtout une présentation claire et donc plus abordable de la méthode.

Pour garantir des modèles réduits à coefficients réels, une adaptation de la méthode est nécessaire. La méthode exploitant la représentation en série de Kautz, permettant une représentation réelle directement, est ainsi présentée dans la section III.4.

III.3. Méthode de réduction utilisant les fonctions de Müntz-Laguerre (MLOR)

Nous nous intéressons au début de cette partie à la construction d'un ensemble de fonctions linéairement indépendantes en se servant de la représentation de Müntz-Laguerre de la fonction de transfert du système original. Dans un second temps, nous posons clairement le problème de la réduction de modèle comme une minimisation de l'erreur quadratique et mettons en place une méthode de calcul des produits scalaires pour l'optimisation des paramètres du modèle réduit. Ce problème est ensuite résolu et le modèle réduit enfin déduit.

III.3.1. Construction d'un ensemble de fonctions relatives à $\hat{f}(s)$

Dans ce paragraphe nous établissons des relations permettant de construire un ensemble de fonctions $\Omega_R = \{\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_k, \dots, \hat{f}_R\}$ obtenu à partir de l'application d'un opérateur linéaire Λ_{α_k} à la fonction originale $\hat{f}(s)$. Pour que le problème de réduction d'ordre possède une solution unique il faut que cet ensemble Ω_R soit un ensemble de fonctions linéairement indépendantes.

Le premier pas de la démarche consiste à définir un opérateur linéaire Λ_{α_k} , relatif aux fonctions de Müntz-Laguerre $\hat{\phi}_n(s)$ utilisées. Le choix de l'opérateur Λ_{α_k} est essentiel. On montre que l'opérateur choisi (III.15) permet de préserver la position des pôles ce qui, comme nous l'avons vu précédemment, s'avère être une propriété intéressante pour la procédure de réduction de modèles.

Nous rappelons les fonctions de Müntz-Laguerre $\phi_n(t)$, définies par leurs transformées de Laplace dans le chapitre précédent

$$\hat{\phi}_n(s) = \frac{\sqrt{2\Re\{\alpha_n\}}}{s + \alpha_n} \prod_{l=1}^{n-1} \left(\frac{s - \alpha_l^*}{s + \alpha_l} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

où les α_k représentent les paramètres des fonctions de Müntz-Laguerre.

Nous rappelons également le développement de $\hat{f}(s)$ sur la base des fonctions de Müntz-Laguerre

$$\hat{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{\phi}_n(s). \quad (\text{III.14})$$

Un des points-clés de la procédure de réduction d'ordre réside dans la définition d'un opérateur permettant la construction d'un ensemble de fonctions relatives à $\hat{f}(s)$. Nous définissons cet opérateur noté Λ_{α_k} par

$$\hat{f}_k(s) = \Lambda_{\alpha_k} \hat{f}_{k-1}(s) = \frac{s + \alpha_k}{s - \alpha_k^*} \hat{f}_{k-1}(s) - \frac{\alpha_k + \alpha_k^*}{s - \alpha_k^*} \hat{f}_{k-1}(\alpha_k^*) \text{ pour } k = 1, \dots, R. \quad (\text{III.15})$$

A partir de $\hat{f}_0(s) = \hat{f}(s)$, la construction de l'ensemble Ω_R se fait alors de la manière suivante

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(s) &= \Lambda_{\alpha_1} \hat{f}_0(s), \\ \hat{f}_2(s) &= \Lambda_{\alpha_2} \hat{f}_1(s) = \Lambda_{\alpha_2} \Lambda_{\alpha_1} \hat{f}_0(s), \\ &\dots, \\ \hat{f}_k(s) &= \Lambda_{\alpha_k} \hat{f}_{k-1}(s) = \Lambda_{\alpha_k} \Lambda_{\alpha_{k-1}} \dots \Lambda_{\alpha_1} \hat{f}_0(s). \end{aligned}$$

Remarque : Nous pouvons vérifier de proche en proche que les fonctions $\hat{f}_k(s)$ ont toutes les mêmes pôles, en remarquant que $\hat{f}(s)$ et $\hat{g}(s)$, avec

$$\hat{g}(s) = \Lambda_{\alpha} \hat{f}(s) = \frac{s + \alpha}{s - \alpha^*} \cdot \hat{f}(s) - \frac{\alpha + \alpha^*}{s - \alpha^*} \cdot \hat{f}(\alpha^*), \text{ ont le même dénominateur.}$$

En effet, si $\hat{f}(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$, et en remplaçant $\hat{f}(s)$ par son expression dans $\hat{g}(s)$, nous obtenons

$$\hat{g}(s) = \frac{(s + \alpha)B(s) - (\alpha + \alpha^*)f(\alpha^*)A(s)}{(s - \alpha^*)A(s)}$$

Pour $s = \alpha^*$ avec $\hat{f}(\alpha^*) = \frac{B(\alpha^*)}{A(\alpha^*)}$, nous déduisons $(s + \alpha)B(s) - (\alpha + \alpha^*)f(\alpha^*)A(s) = 0$

Alors $\hat{g}(s) = \frac{B'(s)}{A(s)}$. Donc, le dénominateur de $\hat{g}(s)$ est identique à celui de $\hat{f}(s)$.

Pour construire un modèle réduit de $\hat{f}(s)$, il est nécessaire d'exprimer chaque fonction $\hat{f}_k(s)$ directement à partir de $\hat{f}_0(s) = \hat{f}(s)$. L'opérateur défini par la relation (III.15) peut se mettre sous la forme

$$\hat{f}_k(s) = \Lambda_{\alpha_k} \hat{f}_{k-1}(s) = z_k(s) \hat{f}_{k-1}(s) - y_k(s),$$

avec

$$z_k(s) = \frac{s + \alpha_k}{s - \alpha_k^*}$$

et

$$y_k(s) = \frac{\alpha_k + \alpha_k^*}{s - \alpha_k^*} \hat{f}_{k-1}(\alpha_k^*). \quad (\text{III.16})$$

Par récurrence on déduit la relation suivante pour $j = 1, \dots, R$

$$\hat{f}_k(s) = Z_k(s) \hat{f}_0(s) - W_k(s), \quad (\text{III.17})$$

où

$$Z_k(s) = \prod_{l=1}^k z_l(s) \text{ et } W_k(s) = \sum_{n=1}^k y_n(s) \prod_{l=n+1}^k z_l(s).$$

Pour $k = 0$ on a $Z_0(s) = 1$ et $W_0(s) = 0$.

Dans la construction des fonctions $\hat{f}_k(s)$ via (III.15), il est également nécessaire de connaître la valeur de $\hat{f}_{k-1}(\alpha_k^*)$ pour $k = 1, \dots, R$. Considérons la quantité $\sqrt{2\Re\{\alpha_k\}} \hat{f}_{k-1}(\alpha_k^*)$, celle-ci peut être vue comme le produit scalaire de $f_{k-1}(t)$ et de la fonction exponentielle $\zeta_k(t) = \sqrt{2\Re\{\alpha_k\}} \exp(-\alpha_k t)$. Dans le domaine de Laplace ce produit scalaire peut s'écrire

$$\sqrt{2\Re\{\alpha_k\}} \hat{f}_{k-1}(\alpha_k^*) = \langle f_{k-1}, \zeta_k \rangle = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \hat{f}_{k-1}(s) \hat{\zeta}_k^*(-s) ds \quad (\text{III.18})$$

avec $\hat{\zeta}_k(s) = \frac{\sqrt{2\Re\{\alpha_k\}}}{s + \alpha_k}$. En utilisant (III.17) pour exprimer $\hat{f}_{k-1}(s)$ à l'aide de $\hat{f}_0(s)$ on obtient

$$\sqrt{2\Re\{\alpha_k\}} \hat{f}_{k-1}(\alpha_k^*) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left[\hat{f}_0(s) \prod_{l=1}^{k-1} z_l(s) - \sum_{n=1}^{k-1} y_n(s) \prod_{l=n+1}^{k-1} z_l(s) \right] \hat{\zeta}_k^*(-s) ds$$

Les pôles des différents termes $y_n(s)$, $z_l(s)$ (III.16) et $\hat{\zeta}_k^*(-s)$ appartiennent tous au demi-plan droit complexe. D'après le théorème des résidus, la deuxième partie de l'intégrale est donc nulle. La relation se simplifie alors et peut s'écrire

$$\sqrt{2\Re\{\alpha_k\}} \hat{f}_{k-1}(\alpha_k^*) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \hat{f}_0(s) \prod_{l=1}^{k-1} z_l(s) \hat{\zeta}_k^*(-s) ds.$$

Or, en remarquant que $z_k(s) = \frac{s + \alpha_k}{s - \alpha_k^*} = (z_k^*(-s))^{-1}$, on déduit que

$$\sqrt{2\Re\{\alpha_k\}} \hat{f}_{k-1}(\alpha_k^*) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \hat{f}_0(s) \hat{\zeta}_k^*(-s) \prod_{l=1}^{k-1} (z_l^*(-s))^{-1} ds \quad (\text{III.19})$$

où l'on retrouve les fonctions de Müntz-Laguerre de transformées de Laplace

$$\hat{\phi}_k(s) = \frac{\sqrt{2\Re\{\alpha_k\}}}{s + \alpha_k} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{s - \alpha_l^*}{s + \alpha_l} = \hat{\zeta}_k(s) \prod_{l=1}^{k-1} (z_l(s))^{-1}.$$

Cela implique que

$$\sqrt{2\Re\{\alpha_k\}} \hat{f}_{k-1}(\alpha_k^*) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \hat{f}_0(s) \hat{\phi}_k^*(-s) ds = \langle f_0, \phi_k \rangle.$$

De (III.14) on déduit que les quantités (III.18) à calculer sont simplement données par les coefficients du spectre de Müntz-Laguerre de $\hat{f}_0(s) = \hat{f}(s)$, à savoir

$$\sqrt{2\Re\{\alpha_k\}} \hat{f}_{k-1}(\alpha_k^*) = c_k. \quad (\text{III.20})$$

III.3.2. Construction du modèle réduit

L'approximation au sens des moindres carrés de la fonction $\hat{f}_R(s)$ à l'aide du sous-ensemble Ω_{R-1} se résout par la minimisation de l'énergie $\|\varepsilon\|^2$ où

$$\|\varepsilon\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^R q_k \hat{f}_k(s) \right\|^2 \text{ avec } q_R = 1. \quad (\text{III.21})$$

D'après (III.17), cela revient à minimiser

$$\|\varepsilon\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^R q_k Z_k(s) \hat{f}(s) - \sum_{k=1}^R q_k W_k(s) \right\|^2 = \left\| Q(s) \hat{f}(s) - P(s) \right\|^2 \quad (\text{III.22})$$

où l'on a posé $Q(s) = \sum_{k=0}^R q_k Z_k(s)$ et $P(s) = \sum_{k=1}^R q_k W_k(s)$.

En supposant que le vecteur $\vec{q} = [q_0, q_1, \dots, q_k, \dots, q_{R-1}]^T$ soit solution de la minimisation de l'énergie de l'erreur $\hat{\varepsilon}(s)$ et si cette énergie est suffisamment faible, c'est-à-dire

$\left\| Q(s) \hat{f}(s) - P(s) \right\|^2 \approx 0$, on peut déduire le modèle réduit dont l'expression est donnée par

$$\hat{h}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{\sum_{k=1}^R q_k W_k(s)}{\sum_{k=0}^R q_k Z_k(s)}. \quad (\text{III.23})$$

Comme les fonctions $Z_k(s)$ et $W_k(s)$ sont des fractions rationnelles possédant des dénominateurs identiques, le modèle $\hat{h}(s)$ obtenu est d'ordre R . Les coefficients du dénominateur sont complètement définis à partir de \vec{q} .

Remarques :

- Nous rappelons que la difficulté principale dans tout problème d'approximation rationnelle est la détermination du dénominateur. Le numérateur obtenu dans (III.23) bien que généralement de bonne qualité, peut toujours être optimisé a posteriori.

- Le modèle réduit (III.23) conserve les R premiers coefficients du spectre de Müntz-Laguerre de $\hat{f}(s)$ c'est-à-dire $\hat{h}(\alpha_\lambda^*) = \hat{f}(\alpha_\lambda^*)$ pour $\lambda = 1, 2, \dots, R$. La démonstration est établie en annexe A. Cela implique notamment que le modèle réduit tend obligatoirement vers l'original lorsque R tend vers l'infini.

III.3.3. Optimisation des coefficients q_k

Pour construire un modèle réduit de $\hat{f}(s)$, nous considérons l'approximation de la dernière fonction $\hat{f}_R(s)$ par les autres fonctions de $\Omega_{R-1} = \{\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{R-1}\}$. L'approximation au sens des moindres carrés de la fonction $\hat{f}_R(s)$ se résout par la minimisation de la relation (III.21).

Les coefficients q_k minimisant le critère d'erreur (III.21) sont alors solutions d'un système d'équations que l'on peut mettre sous la forme matricielle suivante

$$\Gamma \vec{q} = -\vec{\xi} \quad (\text{III.24})$$

où Γ est une matrice de Gram, composée des produits scalaires $\gamma_{u,k}$ ($u, k = 0, 1, \dots, R-1$) définis par $\gamma_{u,k} \triangleq \langle f_u, f_k \rangle$, $\vec{q} = [q_0, q_1, \dots, q_k, \dots, q_{R-1}]^T$ où T est le transposé et $\vec{\xi} = [\gamma_{R,0}, \gamma_{R,1}, \dots, \gamma_{R,R-1}]^T$ avec $\gamma_{R,k} \triangleq \langle f_R, f_k \rangle$.

Si les fonctions $\hat{f}_k(s)$ sont représentées à l'aide des fonctions de Müntz-Laguerre, sous la

forme $\hat{f}_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^k \hat{\phi}_n(s)$, alors les produits scalaires $\gamma_{u,k}$ pourront être facilement calculés

à l'aide des spectres d_n^k par l'expression

$$\gamma_{u,k} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^u (d_n^k)^*. \quad (\text{III.25})$$

III.3.4. Calcul du spectre des fonctions $\hat{f}_k(s)$

Afin de déterminer aisément les divers produits scalaires $\langle f_u, f_k \rangle$, nous cherchons à exprimer les spectres de Müntz-Laguerre des différentes fonctions de l'ensemble Ω_R .

Considérons dans un premier temps

$$\hat{f}_{k-1}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{k-1} \hat{\phi}_n(s) \quad (\text{III.26})$$

avec $d_n^{k-1} = \langle f_{k-1}, \phi_n \rangle$ les coefficients de Müntz-Laguerre de la fonction $\hat{f}_{k-1}(s)$ (pour $k=1$ on a $d_n^0 = c_n$ (III.14)). L'application de l'opérateur Λ_{α_k} à $\hat{f}_{k-1}(s)$ conduit à appliquer cet opérateur Λ_{α_k} aux fonctions de Müntz-Laguerre

$$\hat{f}_k(s) = \Lambda_{\alpha_k} \hat{f}_{k-1}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{k-1} [\Lambda_{\alpha_k} \hat{\phi}_n(s)], \quad (\text{III.27})$$

relation que l'on cherche à mettre sous la forme

$$\hat{f}_k(s) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m^k \hat{\phi}_m(s). \quad (\text{III.28})$$

Les fonctions de Müntz-Laguerre étant orthonormées, on a $d_m^k = \langle f_k, \phi_m \rangle = \langle \Lambda_{\alpha_k} f_{k-1}, \phi_m \rangle$.

En utilisant (III.26), nous pouvons déduire la relation entre les coefficients d_m^k et les coefficients d_n^{k-1}

$$d_m^k = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{k-1} \langle \Lambda_{\alpha_k} \phi_n, \phi_m \rangle.$$

On note $t_{n,m}^k = \langle \Lambda_{\alpha_k} \phi_n, \phi_m \rangle$, on a alors, d'après la définition de l'opérateur (III.12)

$$\begin{aligned} t_{n,m}^k &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left(\frac{s + \alpha_k}{s - \alpha_k^*} \hat{\phi}_n(s) - \frac{\alpha_k + \alpha_k^*}{s - \alpha_k^*} \hat{\phi}_n(\alpha_k^*) \right) \hat{\phi}_m^*(-s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{s + \alpha_k}{s - \alpha_k^*} \hat{\phi}_n(s) \hat{\phi}_m^*(-s) ds \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

En utilisant la définition des fonctions de Müntz-Laguerre (II.1) puis en simplifiant les zéros et les pôles identiques, à l'aide du théorème des résidus on déduit que

- pour $m > n$ $t_{n,m}^k = 0$,

- pour $m = n$ $t_{n,n}^k = \left(\frac{\alpha_n - \alpha_k}{\alpha_n + \alpha_k^*} \right)$,

- pour $m < n$ $t_{n,m}^k = \frac{(\alpha_k + \alpha_k^*) \sqrt{\alpha_n + \alpha_n^*} \sqrt{\alpha_m + \alpha_m^*}}{(\alpha_k^* + \alpha_n)(\alpha_k^* + \alpha_m)} \prod_{l=m+1}^{n-1} \frac{\alpha_k^* - \alpha_l^*}{\alpha_k^* + \alpha_l}.$

A noter que $\alpha_{k+\lambda R} = \alpha_k$ et $\alpha_k \in \vec{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_R\}$, on a alors $t_{n,m}^k = 0$ pour $n > m + R$. On obtient alors la relation

$$d_m^k = d_m^{k-1} t_{m,m}^k + \sum_{n=m+1}^{m+R} d_n^{k-1} t_{n,m}^k \quad (\text{III.30})$$

Puisque $\alpha_{k+\lambda R} = \alpha_k$ on aura également $t_{n+\lambda R, m+\lambda R}^k = t_{n, m}^k$.

Les relations entre les coefficients du spectre de $\hat{f}_{k-1}(s)$ et ceux du spectre de $\hat{f}_k(s)$ peuvent se mettre sous forme matricielle. Nous présentons l'exemple d'une matrice quadri-bandes (c.à.d. $R+1$ bandes) obtenue avec $R=3$

$$\begin{bmatrix} d_1^k \\ d_2^k \\ d_3^k \\ d_4^k \\ d_5^k \\ d_6^k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1}^k & t_{2,1}^k & t_{3,1}^k & t_{4,1}^k & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & t_{2,2}^k & t_{3,2}^k & t_{4,2}^k & t_{5,2}^k & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & t_{3,3}^k & t_{4,3}^k & t_{5,3}^k & t_{6,3}^k & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & t_{1,1}^k & t_{2,1}^k & t_{3,1}^k & t_{4,1}^k & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{2,2}^k & t_{3,2}^k & t_{4,2}^k & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{3,3}^k & t_{4,3}^k & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{4,4}^k & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{k-1} \\ d_2^{k-1} \\ d_3^{k-1} \\ d_4^{k-1} \\ d_5^{k-1} \\ d_6^{k-1} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

Les développements mathématiques que nous avons effectués ont permis de déterminer les matrices de passages pour le calcul de proche en proche des spectres de Müntz-Laguerre de toutes les fonctions de l'ensemble Ω_R et ainsi d'effectuer le calcul des produits scalaires nécessaires à la résolution du problème (III.24).

III.3.5. Itération de la méthode

La méthode de réduction d'ordre mise en œuvre peut être rendue itérative pour améliorer la qualité du modèle réduit. En effet, le dénominateur obtenu $Q(s)$ permet de générer un nouveau jeu de pôles, paramètres des fonctions de Müntz-Laguerre pour l'itération suivante.

Sur le schéma de la figure III.2 nous pouvons suivre facilement les différentes étapes de la méthode de réduction que nous venons de décrire.

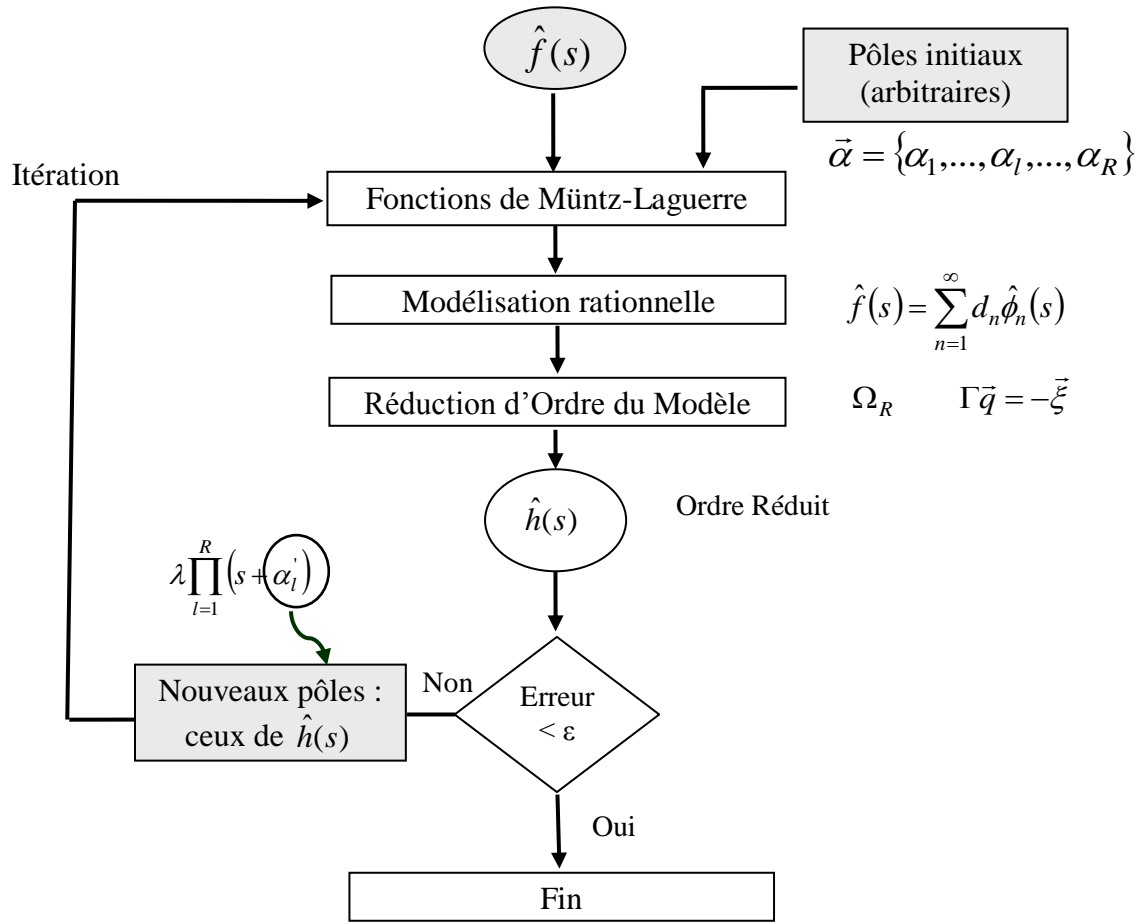


Figure III.2 : Schéma complet de l'algorithme mis en œuvre montrant le principe d'itération de la méthode

Soit $\hat{f}(s)$ la transformée de Laplace de $f(t)$. On cherche à déterminer un modèle réduit $\hat{h}(s)$ sous la forme $\hat{h}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$. La première étape de l'algorithme est la modélisation rationnelle.

On cherche à calculer le spectre de Müntz-Laguerre qui permettra de modéliser le système et déterminer le modèle rationnel approché. Les fonctions de Müntz-Laguerre sont construites à partir d'un vecteur de paramètres se répétant à l'infini.

La deuxième étape de l'algorithme est la réduction d'ordre du modèle. On construit Ω_R , un ensemble de fonctions linéairement indépendantes et on calcule la matrice de Gram des produits scalaires dont on déduit enfin le modèle réduit $\hat{h}(s)$.

De manière générale, le critère de qualité du modèle réduit est une bonne estimation de l'erreur d'approximation. L'erreur normalisée entre le modèle réduit et le modèle original, est définie par

$$Eqr = \|f - h\|^2 / \|f\|^2 \quad (\text{III.32})$$

On réitère la méthode jusqu'à atteindre la qualité désirée ou pour un certain nombre d'itérations fixé a priori. A chaque itération, les pôles associés au dénominateur obtenu

définissent les paramètres de Muntz-Laguerre pour l'itération suivante. Si la qualité désirée ne peut pas être atteinte, cela peut signifier que l'ordre R de réduction est trop faible.

III.4. Méthode de réduction utilisant les fonctions de Kautz (KOR)

Nous présentons dans ce paragraphe la méthode de réduction basée sur les fonctions de Kautz. Elle reprend les étapes de la méthode de Müntz-Laguerre, tout en exploitant les avantages des fonctions de Kautz.

III.4.1. Construction d'un ensemble de fonctions relatives à $\hat{f}(s)$

Nous rappelons que l'objectif final est le même que pour le développement précédent avec les fonctions de Müntz-Laguerre, on cherche à approcher une fonction de transfert $\hat{f}(s)$ par un modèle rationnel $\hat{h}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ d'ordre faible. On suppose que la fonction originale est à paramètres réels (ex. système à réponse impulsionnelle réelle), l'objectif est alors de déterminer un modèle rationnel d'ordre réduit, également à paramètres réels.

La résolution du problème de minimisation précédent (III.21) est facilitée par la construction d'un ensemble de fonctions linéairement indépendantes Π_R . De manière identique à la méthode utilisant les fonctions de Müntz-Laguerre, on peut construire un ensemble de fonctions $\Pi_R = \{\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_R\}$ obtenu par application de l'opérateur Λ_{α_k}

$$\hat{f}_k(s) = \Lambda_{\alpha_k} \hat{f}_{k-1}(s) = \frac{s + \alpha_k}{s - \alpha_k^*} \hat{f}_{k-1}(s) - \frac{\alpha_k + \alpha_k^*}{s - \alpha_k^*} \hat{f}_{k-1}(\alpha_k^*) \quad \text{pour } k = 1, \dots, R.$$

A partir de $\hat{f}_0(s) = \hat{f}(s)$, la construction de l'ensemble Π_R se fait de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(s) &= \Lambda_{\alpha_1} \hat{f}_0(s), \\ \hat{f}_2(s) &= \Lambda_{\alpha_2} \hat{f}_1(s) = \Lambda_{\alpha_2} \Lambda_{\alpha_1} \hat{f}_0(s), \\ &\dots, \\ \hat{f}_R(s) &= \Lambda_{\alpha_R} \hat{f}_{R-1}(s) = \Lambda_{\alpha_R} \Lambda_{\alpha_{R-1}} \dots \Lambda_{\alpha_1} \hat{f}_0(s). \end{aligned}$$

L'utilisation des fonctions de Müntz-Laguerre conduit généralement à des modèles réduits à paramètres complexes. Afin d'obtenir un modèle à paramètres purement réels, il est nécessaire, pour son obtention de construire un ensemble de fonctions à paramètres réels. Dans ce but, les paramètres $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{R-1}, \alpha_R\}$ utilisés pour définir $\Omega_R = \{\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_R\}$ sont couplés par paires réelles ou complexes conjuguées. Il en découle que les fonctions d'indice pair sont à coefficients réels par construction. Mais, même ainsi, dès lors que des paires complexes conjuguées sont utilisées, les fonctions temporelles d'indice impair sont complexes. Aussi pour atteindre notre objectif, nous avons imaginé une

combinaison différente des opérateurs et considéré le nouvel ensemble de fonctions $\Pi_R = \{\hat{g}_0, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_R\}$ construit à partir de $\hat{g}_0(s) = \hat{f}(s)$ et ainsi défini

$$\begin{aligned}\hat{g}_{2k-1}(s) &= (\Lambda_{\alpha_{2k}} + \Lambda_{\alpha_{2k-1}}) \hat{g}_{2k-2}(s) = (\Lambda_{\alpha_{2k}} + \Lambda_{\alpha_{2k-1}}) \Lambda_{\alpha_{2k-2}} \Lambda_{\alpha_{2k-3}} \dots \Lambda_{\alpha_1} \hat{g}_0(s) \\ \hat{g}_{2k}(s) &= \Lambda_{\alpha_{2k}} \Lambda_{\alpha_{2k-1}} \hat{g}_{2k-2}(s) = \Lambda_{\alpha_{2k}} \Lambda_{\alpha_{2k-1}} \dots \Lambda_{\alpha_1} \hat{g}_0(s)\end{aligned}\quad (\text{III.33})$$

pour $k = 1, \dots, R/2$. Les premières fonctions sont données par

$$\begin{aligned}\hat{g}_1(s) &= (\Lambda_{\alpha_2} + \Lambda_{\alpha_1}) \hat{g}_0(s), \\ \hat{g}_2(s) &= \Lambda_{\alpha_2} \Lambda_{\alpha_1} \hat{g}_0(s), \\ \hat{g}_3(s) &= (\Lambda_{\alpha_4} + \Lambda_{\alpha_3}) \hat{g}_2(s) = (\Lambda_{\alpha_4} + \Lambda_{\alpha_3}) \Lambda_{\alpha_2} \Lambda_{\alpha_1} \hat{g}_0(s), \\ \hat{g}_4(s) &= \Lambda_{\alpha_4} \Lambda_{\alpha_3} \hat{g}_2(s) = \Lambda_{\alpha_4} \Lambda_{\alpha_3} \Lambda_{\alpha_2} \Lambda_{\alpha_1} \hat{g}_0(s),\end{aligned}$$

Pour nos développements mathématiques, nous utiliserons la forme suivante des fonctions

$$\begin{cases} \hat{g}_{2k-1}(s) = A_{2k-1}(s) \hat{g}_{2k-2}(s) - B_{2k-1}(s) \\ \hat{g}_{2k}(s) = A_{2k}(s) \hat{g}_{2k-2}(s) - B_{2k}(s) \end{cases}\quad (\text{III.34})$$

avec $A_{2k-1}(s)$ et $A_{2k}(s)$ fractions rationnelles, définies pour $k = 1, \dots, R/2$ par

$$\begin{aligned}A_{2k-1}(s) &= \frac{s + \alpha_{2k}}{s - \alpha_{2k}^*} + \frac{s + \alpha_{2k-1}}{s - \alpha_{2k-1}^*} \\ A_{2k}(s) &= \frac{s + \alpha_{2k}}{s - \alpha_{2k}^*} \frac{s + \alpha_{2k-1}}{s - \alpha_{2k-1}^*}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}B_{2k-1}(s) &= \frac{\alpha_{2k} + \alpha_{2k}^*}{s - \alpha_{2k}^*} \hat{g}_{2k-2}(\alpha_{2k}^*) + \frac{\alpha_{2k-1} + \alpha_{2k-1}^*}{s - \alpha_{2k-1}^*} \hat{g}_{2k-2}(\alpha_{2k-1}^*) \\ B_{2k}(s) &= \frac{\alpha_{2k}^* + \alpha_{2k-1}}{\alpha_{2k}^* - \alpha_{2k-1}^*} \cdot \frac{\alpha_{2k}^* + \alpha_{2k}}{s - \alpha_{2k}^*} \hat{g}_{2k-2}(\alpha_{2k}^*) + \frac{\alpha_{2k-1}^* + \alpha_{2k}}{\alpha_{2k-1}^* - \alpha_{2k}^*} \cdot \frac{\alpha_{2k-1}^* + \alpha_{2k-1}}{s - \alpha_{2k-1}^*} \hat{g}_{2k-2}(\alpha_{2k-1}^*)\end{aligned}$$

Sachant que les paramètres sont couplés par paires réelles ou complexes conjuguées, on vérifie assez aisément que ces termes sont des fonctions réelles de la variable s .

Les diverses fonctions $\hat{g}_k(s)$ s'expriment à partir de $\hat{f}_0(s)$, par

$$\begin{cases} \hat{g}_{2k}(s) = \left[\prod_{l=1}^k A_{2l}(s) \right] \hat{g}_0(s) - \sum_{u=1}^k B_{2u}(s) \prod_{l=u+1}^k A_{2l}(s) \\ \hat{g}_{2k+1}(s) = A_{2k+1}(s) \hat{g}_{2k}(s) - B_{2k+1}(s) \end{cases}\quad (\text{III.35})$$

III.4.2. Construction du modèle réduit

L'identification des coefficients du numérateur et du dénominateur du modèle réduit est obtenue par la minimisation de l'énergie $\|\varepsilon\|^2$ à présent définie par

$$\|\varepsilon\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^{R/2} q_{2k} \hat{g}_{2k}(s) + \sum_{k=0}^{R/2-1} q_{2k+1} \hat{g}_{2k+1}(s) \right\|^2 \text{ avec } q_R = 1 \text{ (} R \text{ pair).} \quad (\text{III.36})$$

Dans l'expression (III.35), on pose

$$\begin{cases} a_{2k}(s) = \prod_{l=1}^k A_{2l}(s) \\ b_{2k}(s) = \sum_{u=1}^k B_{2u}(s) \prod_{l=u+1}^k A_{2l}(s) \end{cases} \text{ pour } k = 1, \dots, R/2 \quad (\text{III.37})$$

avec $a_0(s) = 1$ et $b_0(s) = 0$ et

$$\begin{cases} a_{2k+1}(s) = A_{2k+1}(s) \prod_{l=1}^k A_{2l}(s) \\ b_{2k+1}(s) = B_{2k+1}(s) + A_{2k+1}(s) \sum_{u=1}^k B_{2u}(s) \prod_{l=u+1}^k A_{2l}(s) \end{cases} \text{ pour } k = 1, \dots, R/2 - 1 \quad (\text{III.38})$$

Les fonctions $a_{2k}(s)$, $a_{2k+1}(s)$, $b_{2k}(s)$ et $b_{2k+1}(s)$ représentent des fractions rationnelles.

En supposant, comme auparavant, que le vecteur $\vec{q} = [q_0, q_1, \dots, q_{R-1}]^T$ est la solution correspondant à la minimisation de l'énergie de l'erreur $\|\varepsilon\|^2$ définie en (III.36), et que celle-ci est suffisamment faible, on obtient l'approximation de $\hat{f}(s)$ suivante

$$\hat{h}(s) = \frac{\sum_{k=0}^{R/2} q_{2k} b_{2k}(s) + \sum_{k=0}^{R/2-1} q_{2k+1} b_{2k+1}(s)}{\sum_{k=0}^{R/2} q_{2k} a_{2k}(s) + \sum_{k=0}^{R/2-1} q_{2k+1} a_{2k+1}(s)} \quad (\text{III.39})$$

Remarques :

- La manière dont nous construisons l'ensemble Π_R nous oblige à choisir un ordre de réduction R pair mais pour les applications visées cet aspect n'est pas très contraignant car les modèles d'origine sont d'habitude d'ordre très élevé voire d'ordre infini.

III.4.3. Optimisation des coefficients q_k

Les coefficients q_k minimisant le critère d'erreur (III.36) sont alors solutions d'un système d'équations mis sous la forme matricielle suivante

$$\Gamma \vec{q} = -\vec{\xi}.$$

De manière similaire à celle effectuée pour Müntz-Laguerre, Γ représente la matrice de Gram des produits scalaires $\gamma_{u,k} \triangleq \langle g_u, g_k \rangle$ pour $(u, k = 0, 1, \dots, R-1)$ et $\vec{\xi}$ le vecteur des produits scalaires $[\gamma_{R,0}, \gamma_{R,1}, \dots, \gamma_{R,R-1}]^T$.

III.4.4. Calcul du spectre des fonctions $\hat{g}_k(s)$

Nous cherchons à exprimer les spectres de Kautz des différentes fonctions de l'ensemble $\Pi_R = \{\hat{g}_0, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_R\}$ afin pouvoir déterminer aisément les divers produits scalaires $\langle g_k, g_l \rangle$. Les fonctions $\hat{g}_k(s)$ sont obtenues récursivement par l'application de combinaisons des opérateurs Λ_{α_k} (III.33). Pour déterminer les spectres de Kautz de ces fonctions $\hat{g}_k(s)$, il est nécessaire de connaître l'impact de l'application des opérateurs Λ_{α_k} sur les fonctions de base. Le détail des calculs relatifs à cette partie est donné en annexe B, seules les principales explications apparaissent dans ce paragraphe.

Dans un premier temps nous considérons une fonction quelconque d'énergie finie

$$\hat{g}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \hat{\psi}_n(s) \quad (\text{III.40})$$

avec $d_n = \langle g, \psi_n \rangle$ les coefficients de Kautz de la fonction $\hat{g}(s)$. L'application de l'opérateur Λ_{α_k} à $\hat{g}(s)$ conduit à appliquer cet opérateur Λ_{α_k} aux fonctions de Kautz,

$$\Lambda_{\alpha_k} \hat{g}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n [\Lambda_{\alpha_k} \hat{\psi}_n(s)] \quad (\text{III.41})$$

relation que l'on cherche à mettre sous la forme

$$\Lambda_{\alpha_k} \hat{g}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} d'_m \hat{\psi}_m(s).$$

Les fonctions de Kautz étant orthonormées, en utilisant (III.41), nous pouvons déduire la relation entre les coefficients d'_m et les coefficients d_n

$$d'_m = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \langle \Lambda_{\alpha_k} \psi_n, \psi_m \rangle. \quad (\text{III.42})$$

On note $t_{n,m}^k = \langle \Lambda_{\alpha_k} \psi_n, \psi_m \rangle$. On a alors, d'après la définition des fonctions de Kautz et après simplification,

$$t_{n,m}^k = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{s + \alpha_k}{s - \alpha_k^*} \hat{\psi}_n(s) \hat{\psi}_m^*(-s) ds. \quad (\text{III.43})$$

Pour le calcul des $t_{n,m}^k$, il est nécessaire de distinguer les indices pairs et impairs des fonctions de Kautz. Les différentes expressions obtenues pour les coefficients $t_{n,m}^k$ sont données en annexe B.

L'application d'un opérateur Λ_{α_k} conduit en définitive à une transformation des spectres qui peut s'exprimer sous la forme matricielle suivante (exemple d'une matrice $(R+2)$ -bandes pour $R=2$).

$$\begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1}^k & t_{2,1}^k & t_{3,1}^k & t_{4,1}^k & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & t_{2,2}^k & t_{3,2}^k & t_{4,2}^k & t_{5,2}^k & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & t_{3,3}^k & t_{4,3}^k & t_{5,3}^k & t_{6,3}^k & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & t_{4,4}^k & t_{5,4}^k & t_{6,4}^k & t_{7,4}^k & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{5,5}^k & t_{6,5}^k & t_{7,5}^k & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{6,6}^k & t_{7,6}^k & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{7,7}^k & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Ces matrices permettront de déterminer récursivement les spectres des différentes fonctions de l'ensemble $\Pi_R = \{\hat{g}_0, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_R\}$ et ainsi de calculer aisément les produits scalaires entre ces fonctions.

Une procédure efficace de réduction de modèle a été présentée, elle s'applique aux fonctions de transfert de dimension finie ou infinie et se base principalement sur la description de Müntz-Laguerre et Kautz de la fonction de transfert originale. Un opérateur linéaire été utilisé pour construire une base d'approximation. La réduction s'effectue en respectant la minimisation d'un critère d'erreur quadratique. Maintenant que notre méthode de réduction est entièrement définie, la seconde partie de ce chapitre concerne la validation et la performance de notre approche, par des exemples extraits de la littérature. Le chapitre suivant se placera plus dans la sphère de la recherche appliquée et décrira les procédures que nous avons mises en place pour une modélisation compacte et pratique des lignes d'interconnexion.

III.5. Quelques exemples académiques d'application de la méthode de réduction

Les systèmes que nous proposons d'étudier proviennent tous d'articles traitant de la réduction de modèle. Les modèles réduits fournis par les auteurs nous permettent de comparer les performances de notre méthode à celles des différentes techniques de réduction existantes. Nous avons choisi de ne pas présenter les détails de programmation, ni les nombreux tests effectués sur les diverses procédures, mais nous nous intéressons seulement aux résultats obtenus.

Par la suite, nous dressons un bilan comparatif de la méthode établie au cours de cette thèse, nous montrons également son potentiel dans le cadre de la réduction de modèle. Dans la section suivante, nous nous focaliserons sur son extension aux systèmes MIMO, les exemples afférents étant présentés dans le chapitre IV.

III.5.1. Exemple de Lucas

Il s'agit d'un système dont la fonction de transfert est [Luc85]

$$\hat{f}(s) = \frac{s^5 + 1014 s^4 + 69140 s^2 + 14069 s^3 + 69140 s^2 + 140100 s + 100000}{s^6 + 222 s^5 + 14541 s^4 + 248420 s^3 + 1454100 s^2 + 2220000 s + 1000000}.$$

C'est une fonction de transfert d'ordre 6, caractérisée par trois pôles doubles bien distincts, à savoir -1, -10, et -100.

En utilisant la méthode développée, on détermine le modèle $\hat{h}(s) \approx \hat{f}(s)$. Nous considérons tout d'abord un modèle de Müntz-Laguerre de $\hat{f}(s)$ à l'aide de $N = 50$ coefficients du spectre de Müntz-Laguerre et pour $I = 1024$ points de calcul pour la FFT. Ce modèle sert de point de départ pour constituer un ensemble $\Omega_R = \{\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_R\}$ avec $\hat{f}_0(s) \approx \hat{f}(s)$ et pour $R = 4$.

Les paramètres des fonctions de Müntz-Laguerre de départ ont été choisis de manière arbitraire, et sont donnés par $\vec{\alpha} = \{90; 0,7; 5; 16\}$. Un modèle réduit d'ordre 4 est obtenu à l'aide de la méthode présentée. A la 2^{ème} itération, le modèle réduit obtenu est donné par

$$\hat{h}(s) = \frac{(9,94 \cdot 10^{-1} + 1,41 \cdot 10^{-3} j)s^3 + (1010 - 0,11 j)s^2 + (5530 - 1,91 j)s + (1,01 \cdot 10^4 + 2,36 j)}{s^4 + (214,7 - 2,5 \cdot 10^{-2} j)s^3 + (1,27 \cdot 10^4 - 0,97 j)s^2 + (1,39 \cdot 10^5 - 28,45 j)s + 1,01 \cdot 10^5 + 39,49 j}$$

Remarque 1 :

On vérifie bien que d'une manière générale, la méthode basée sur les fonctions de Müntz-Laguerre fournit un modèle réduit à coefficients complexes même lorsque $\hat{f}(s)$ est à coefficients réels.

Le module et la phase du modèle original et ceux du modèle réduit obtenus via MLOR sont tracés sur la figure (III.3).

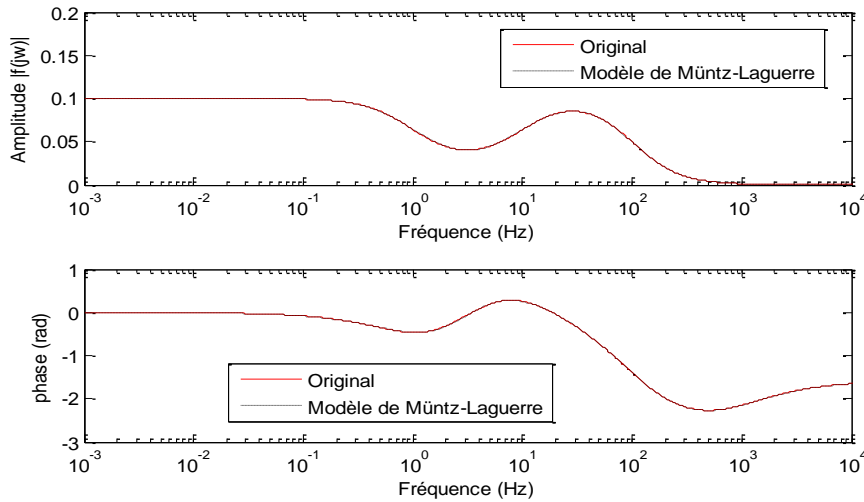


Figure III.3 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle MLOR d'ordre 4

Pour mesurer la qualité du modèle réduit, nous calculons l'erreur quadratique relative $Eqr = \|f - h\|^2 / \|f\|^2$ engendrée par la réduction. Elle vaut à la 2^{ème} itération $Eqr = 4,07 \cdot 10^{-6}$, ce qui montre que le modèle réduit est de très bonne qualité.

Nous sommes pourtant confrontés à un problème : si les fonctions de Müntz-Laguerre sont complexes, le modèle réduit sera également à coefficients complexes, or, dans la pratique, nous travaillons avec des systèmes réels.

Afin de mieux modéliser ce type de systèmes, l'utilisation des fonctions de Kautz peut s'avérer plus pratique pour l'inversion de la transformée de Laplace et la réduction d'ordre des modèles. En partant d'un modèle de Kautz de cette fonction $\hat{f}(s)$ ($N = 50$ coefficients calculés pour $I = 1024$ points pour la FFT avec $\vec{\alpha} = \{90; 0,7; 5; 16\}$ initialement), nous cherchons à déterminer un modèle réduit également d'ordre $R = 4$.

En utilisant la méthode KOR, on vérifie que les coefficients du numérateur et du dénominateur du modèle réduit ont des valeurs réelles. Le module et la phase du modèle original et ceux du modèle réduit obtenus par KOR sont tracés sur la figure III.4.

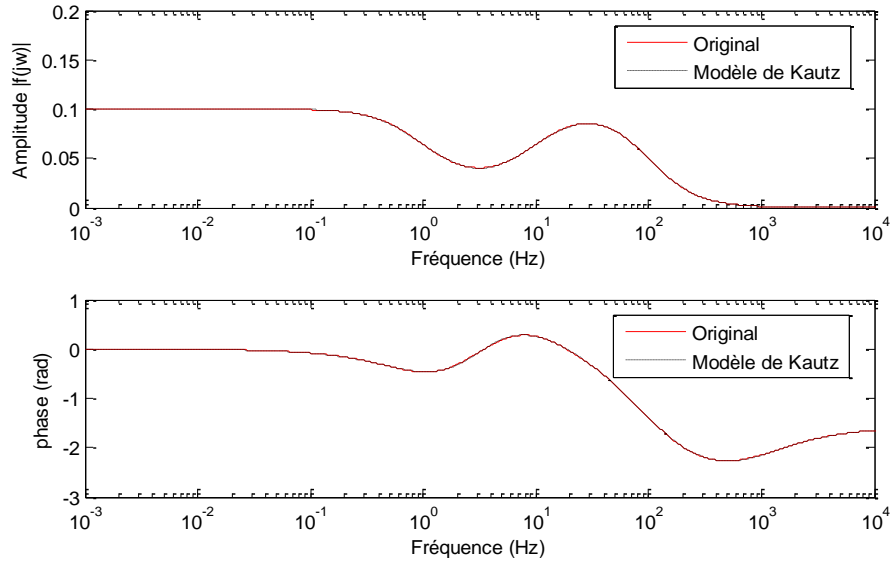


Figure III.4 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle KOR d'ordre 4

La fonction de transfert réduite à l'ordre $R = 4$ via KOR (Kautz based Order Reduction), obtenue après la 2^{ème} itération est

$$\hat{h}(s) = \frac{0,99 s^3 + 1009 s^2 + 5501 s + 1,08 \cdot 10^4}{s^4 + 214,4 s^3 + 1,27 \cdot 10^4 s^2 + 1,39 \cdot 10^5 s + 10^5}.$$

L'erreur quadratique relative est très faible, à la 2^{ème} itération elle vaut $E_{qr} = 4,01 \cdot 10^{-6}$. Nous représentons sur la figure III.5 la courbe de l'erreur quadratique obtenue utilisant la méthode KOR en fonction du nombre d'itérations.

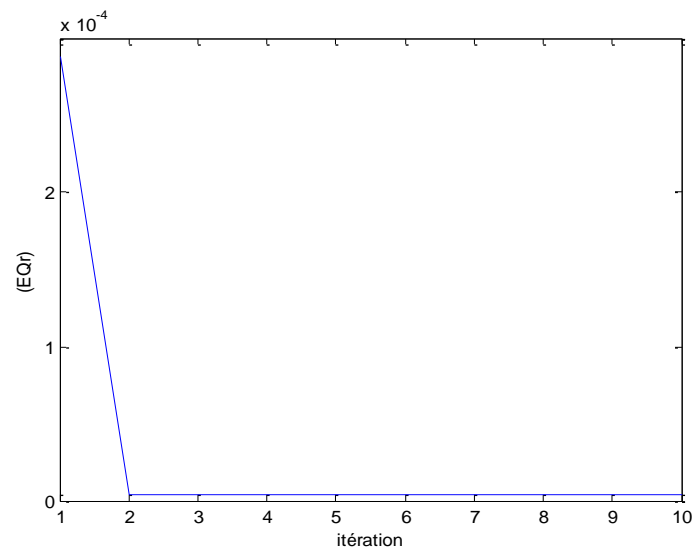


Figure III.5 : Courbe de l'erreur via KOR avec $R = 4$, sur 10 itérations

Le tableau III.1 nous donne un récapitulatif des erreurs engendrées.

Itération	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	5 ^{ème}	10 ^{ème}
Modèle MLOR	$2,88.10^{-4}$	$4,07.10^{-6}$	$4,01.10^{-6}$	$3,99.10^{-6}$	$3,99.10^{-6}$
Modèle KOR	$1,13.10^{-5}$	$4,01.10^{-6}$	$4,00.10^{-6}$	$4,00.10^{-6}$	$4,00.10^{-6}$

Tableau III.1 : Erreurs quadratiques relatives obtenues pour les modèles MLOR et KOR sur 10 itérations

On peut voir figures III.3 et III.4 que les réponses fréquentielles des modèles réduits obtenus par les méthodes de MLOR et de KOR sont graphiquement superposées à celles du système original. On peut voir aussi d'après le tableau III.1 que pour les deux modèles, les valeurs de l'erreur associée sont quasiment identiques et restent presque inchangées à partir de la 2^{ème} itération.

III.5.1.a. Choix du jeu de paramètres initiaux

Comme on a pu le voir précédemment, l'algorithme nécessite le choix d'un jeu de paramètres de départ pour définir les fonctions de base. Au cours des différents tests effectués, on a essayé de voir quel type de jeu de paramètres initial pouvait donner le meilleur modèle réduit. Pour cela, les différents tests nous ont amenés à choisir trois configurations différentes pour ce jeu de paramètres initial : des paramètres réels, des paramètres complexes ou une combinaison de paramètres complexes et réels.

Sur cet exemple, les trois configurations conduisent à des solutions presque identiques. Nous avons reporté dans le tableau III.2 les valeurs des pôles des modèles réduits associés à chaque jeu de paramètres initial, et cela au bout de 3 itérations à chaque fois.

Jeu initial de paramètres $\bar{\alpha}$	itérations	P_1	P_2	P_3	P_4
$\{1; 2; 3; 4\}$	$1^{ère} \text{ itér}$ $2^{ème} \text{ itér}$ $3^{ème} \text{ itér}$	$-2,47 \cdot 10^{+1} - 1,73j$ $-8,46 \cdot 10^{+1}$ $-8,96 \cdot 10^{+1}$	$-2,47 \cdot 10^{+1} + 1,73j$ $-1,18 \cdot 10^{+2}$ $-1,10 \cdot 10^{+2}$	$-9,18 \cdot 10^{-1} - 0,31j$ $-1,30 \cdot 10^{+1}$ $-1,29 \cdot 10^{+2}$	$-9,18 \cdot 10^{-1} + 0,31j$ $-7,71 \cdot 10^{-1}$ $-7,76 \cdot 10^{-1}$
$\{1; 10; 100; 1000\}$	$1^{ère} \text{ itér}$ $2^{ème} \text{ itér}$ $3^{ème} \text{ itér}$	$-9,14 \cdot 10^{+1}$ $-8,96 \cdot 10^{+1}$ $-8,96 \cdot 10^{+1}$	$-1,08 \cdot 10^{+2}$ $-1,10 \cdot 10^{+2}$ $-1,10 \cdot 10^{+2}$	$-1,29 \cdot 10^{+2}$ $-1,30 \cdot 10^{+2}$ $-1,30 \cdot 10^{+2}$	$-7,76 \cdot 10^{-1}$ $-7,76 \cdot 10^{-1}$ $-7,76 \cdot 10^{-1}$
$\{100 \pm 5j; 33; 0,1\}$	$1^{ère} \text{ itér}$ $2^{ème} \text{ itér}$ $3^{ème} \text{ itér}$	$-9,17 \cdot 10^{+1}$ $-8,96 \cdot 10^{+1}$ $-8,96 \cdot 10^{+1}$	$-1,08 \cdot 10^{+2}$ $-1,11 \cdot 10^{+2}$ $-1,10 \cdot 10^{+2}$	$-1,28 \cdot 10^{+2}$ $-1,30 \cdot 10^{+2}$ $-1,30 \cdot 10^{+2}$	$-7,85 \cdot 10^{-1}$ $-7,76 \cdot 10^{-1}$ $-7,76 \cdot 10^{-1}$
$\{0,2 \pm 20j; 55 \pm 10j\}$	$1^{ère} \text{ itér}$ $2^{ème} \text{ itér}$ $3^{ème} \text{ itér}$	$-8,29 \cdot 10^{+1} - 46j$ $-9,14 \cdot 10^{+1}$ $-8,96 \cdot 10^{+1}$	$-8,29 \cdot 10^{+1} + 46j$ $-1,08 \cdot 10^{+2}$ $-1,11 \cdot 10^{+2}$	$-7,43 - 9,02j$ $-1,27 \cdot 10^{+2}$ $-1,30 \cdot 10^{+2}$	$-7,43 + 9,02j$ $-9,32 \cdot 10^{-1}$ $-7,76 \cdot 10^{-1}$

Tableau III.2. Convergence des pôles pour différents jeux de paramètre via KOR

Donc, on voit bien pour cet exemple, que quelles que soient la configuration et les valeurs du jeu de paramètres de départ, les pôles du modèle réduit convergent vers une même solution, après seulement 3 itérations. Le tableau III.3 montre la convergence des valeurs de l'erreur quadratique vers le même résultat quelles que soient la configuration et les valeurs du jeu de paramètres de départ.

Jeu initial de paramètres $\bar{\alpha}$	itérations	erreur quadratique
$\{1; 2; 3; 4\}$	$1^{ère} \text{ itér}$ $2^{ème} \text{ itér}$ $3^{ème} \text{ itér}$	$1,15 \cdot 10^{-1}$ $7,59 \cdot 10^{-6}$ $4,00 \cdot 10^{-6}$
$\{1; 10; 100; 1000\}$	$1^{ère} \text{ itér}$ $2^{ème} \text{ itér}$ $3^{ème} \text{ itér}$	$4,22 \cdot 10^{-6}$ $4,00 \cdot 10^{-6}$ $4,00 \cdot 10^{-6}$
$\{100 \pm 5j; 33; 0,1\}$	$1^{ère} \text{ itér}$ $2^{ème} \text{ itér}$ $3^{ème} \text{ itér}$	$4,61 \cdot 10^{-6}$ $4,00 \cdot 10^{-6}$ $4,00 \cdot 10^{-6}$
$\{0,2 \pm 20j; 55 \pm 10j\}$	$1^{ère} \text{ itér}$ $2^{ème} \text{ itér}$ $3^{ème} \text{ itér}$	$6,04 \cdot 10^{-3}$ $5,17 \cdot 10^{-5}$ $4,00 \cdot 10^{-6}$

Tableau III.3 : Convergence de l'erreur pour différents jeux de paramètres via KOR

D'une manière générale nous avons constaté que bien souvent le résultat final, après quelques itérations, est peu sensible au choix du jeu initial de paramètres. Néanmoins comme le montre le tableau III.3, une assez large dispersion initiale des pôles peut améliorer la convergence de la méthode.

III.5.1.b. Identification d'un système

Nous avons voulu vérifier que les méthodes permettaient de retrouver les paramètres (numérateur, dénominateur) d'un système original. Nous avons considéré cet exemple de Lucas (ordre 6) et choisis le jeu initial de six paramètres identiques, $\vec{\alpha} = \{5; 5; 5; 5; 5; 5\}$. En employant la méthode KOR, nous constatons qu'après seulement 2 itérations le modèle original de Lucas est identifié

$$\hat{h}(s) = \frac{s^5 + 1014s^4 + 69140s^3 + 14069s^2 + 69140s^2 + 140100s + 100000}{s^6 + 222s^5 + 14541s^4 + 248420s^3 + 1454100s^2 + 2220000s + 1000000}$$

Nous retrouvons très précisément les mêmes pôles, à savoir trois pôles doubles -1, -10, et -100.

Les résultats obtenus montrent que cette méthode identifie bien les paramètres du système. D'une manière générale, on peut donc dire que l'approche proposée permet une bonne identification des systèmes linéaires.

III.5.1.c. Conservation des R premiers coefficients

Afin de vérifier que la méthode de réduction conserve les R premiers coefficients du modèle de Kautz, nous calculons ceux-ci pour $\vec{\alpha} = \{1; 2; 3; 4\}$ et $R = 4$.

Nous traçons la courbe des 30 premiers coefficients obtenus à la 1^{ère} itération et observons que la courbe des coefficients du modèle réduit suit celle de l'original

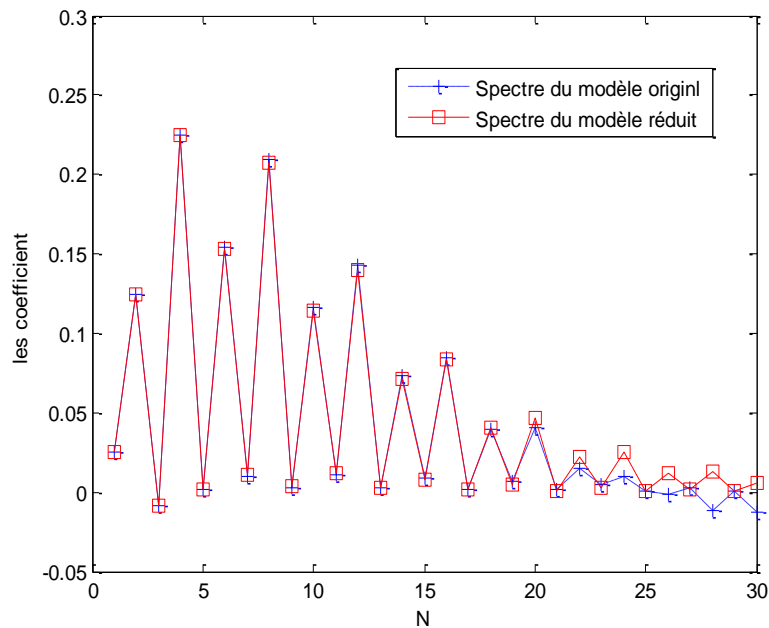


Figure III.6 : Courbe des 30 premiers coefficients

Le Tableau III.4 contient les valeurs de ces coefficients.

Coefficient	Modèle Original de Kautz	Modèle réduit de Kautz
c_1	$2,57 \cdot 10^{-2}$	$2,57 \cdot 10^{-2}$
c_2	$1,24 \cdot 10^{-1}$	$1,24 \cdot 10^{-1}$
c_3	$-8,53 \cdot 10^{-3}$	$-8,53 \cdot 10^{-3}$
c_4	$2,24 \cdot 10^{-1}$	$2,24 \cdot 10^{-1}$
c_5	$1,96 \cdot 10^{-3}$	$1,45 \cdot 10^{-3}$
c_6	$1,53 \cdot 10^{-1}$	$1,52 \cdot 10^{-1}$
c_7	$1,03 \cdot 10^{-2}$	$1,05 \cdot 10^{-2}$
c_8	$2,09 \cdot 10^{-1}$	$2,07 \cdot 10^{-1}$
c_9	$3,21 \cdot 10^{-3}$	$3,27 \cdot 10^{-3}$
c_{10}	$1,15 \cdot 10^{-1}$	$1,14 \cdot 10^{-1}$

Tableau III.4 : Valeurs des 10 premiers coefficients du modèle de Kautz

L'analyse du tableau III.4 permet de constater que comme prévu, l'approche proposée permet de conserver les $R=4$ premiers coefficients du spectre de Kautz.

III.5.2. Exemple d'un câble sous-marin

Nous reprenons l'exemple de la fonction de transfert d'un câble de transmission sous-marin [Hsu90], introduit dans le chapitre précédent et donné par

$$\hat{f}(s) = e^{-\sqrt{K}s} \text{ avec } K = 1.$$

La réponse impulsionnelle du câble sous-marin est connue et a pour expression

$$f(t) = \frac{1}{2K\sqrt{\pi}} \left(\frac{K}{t} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{K}{4t}} \text{ pour } t > 0.$$

On détermine un premier modèle de $f(t)$ à l'aide de $N=50$ coefficients du spectre de Müntz-Laguerre et de Kautz et pour $I=1024$ points de calcul pour la FFT. Les pôles des fonctions de Müntz-Laguerre et de Kautz ont été choisis de manière arbitraire, réels et sont donnés par $\alpha = \{10^{-2}; 10^3; 1; 10; 10^{-1}; 10^4\}$.

La fonction de transfert du modèle réduit MLOR d'ordre 6, obtenu à la 3ème itération est donnée par

$$\begin{aligned} \hat{h}(s) = & \frac{-(2,52 \cdot 10^{-2} + 9,56 \cdot 10^{-3} j)s^5 + (9,64 + 2,11 j)s^4 - (1396 + 219,5 j)s^3}{s^6 + (127,9 + 12,11 j)s^5 + (5652 + 587,4 j)s^4 + (8,87 \cdot 10^4 + 1,01 \cdot 10^4 j)s^3} \\ & + \frac{(8,17 \cdot 10^4 + 9545 j)s^2 + (1,06 \cdot 10^5 + 1,07 \cdot 10^4 j)s + (1,06 \cdot 10^4 + 891 j)}{(2,70 \cdot 10^5 + 2,96 \cdot 10^4 j)s^2 + (1,59 \cdot 10^5 + 1,56 \cdot 10^4 j)s + 1,15 \cdot 10^4 + 960,3 j} \end{aligned}$$

Le module et la phase du modèle original et ceux du modèle réduit obtenus via la méthode MLOR sont tracés sur la figure III.7. Les courbes du module et de la phase du modèle réduit $\hat{h}(s)$ à l'ordre 6 se confondent de manière quasi parfaite avec celles du modèle original $\hat{f}(s)$. L'erreur quadratique relative est très faible, à la 3^{ème} itération elle vaut $E_{qr} = 3,76.10^{-4}$.

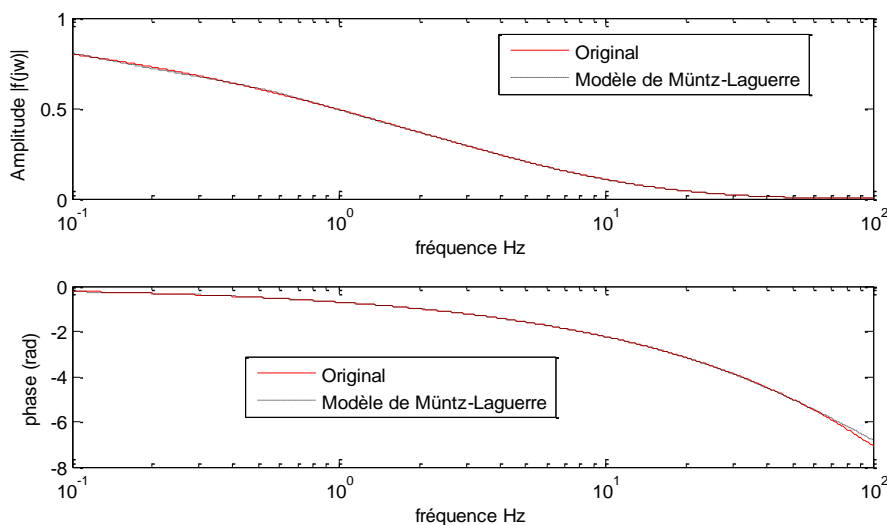


Figure III.7 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle MLOR d'ordre 6

La réduction de modèle de la fonction du câble via la méthode KOR est également effectuée. La fonction de transfert du modèle réduit à l'ordre 6 est donnée après la 3^{ème} itération par

$$\hat{h}(s) = \frac{-5,72 \cdot 10^{-3} s^5 + 5,45 s^4 - 1073 s^3 + 7,15 \cdot 10^4 s^2 + 7,02 \cdot 10^4 s + 4675}{s^6 + 122,8 s^5 + 4963 s^4 + 7,68 \cdot 10^4 s^3 + 2,09 \cdot 10^5 s^2 + 9,88 \cdot 10^4 s + 4987}.$$

La figure III.8 donne la représentation de la réponse impulsionnelle du modèle réduit de Kautz $g(t)$ ainsi obtenue, elle est comparée à la réponse impulsionnelle exacte du câble sous-marin $f(t)$.

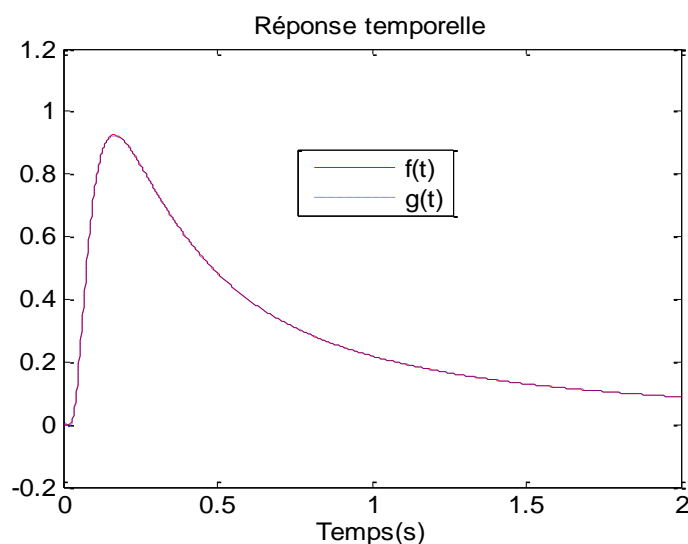


Figure III.8 : Réponse impulsionnelle $f(t)$ et son modèle KOR approché $g(t)$

Nous traçons sur la figure III.9 les réponses fréquentielles du système original $\hat{f}(s)$ et du modèle réduit KOR.

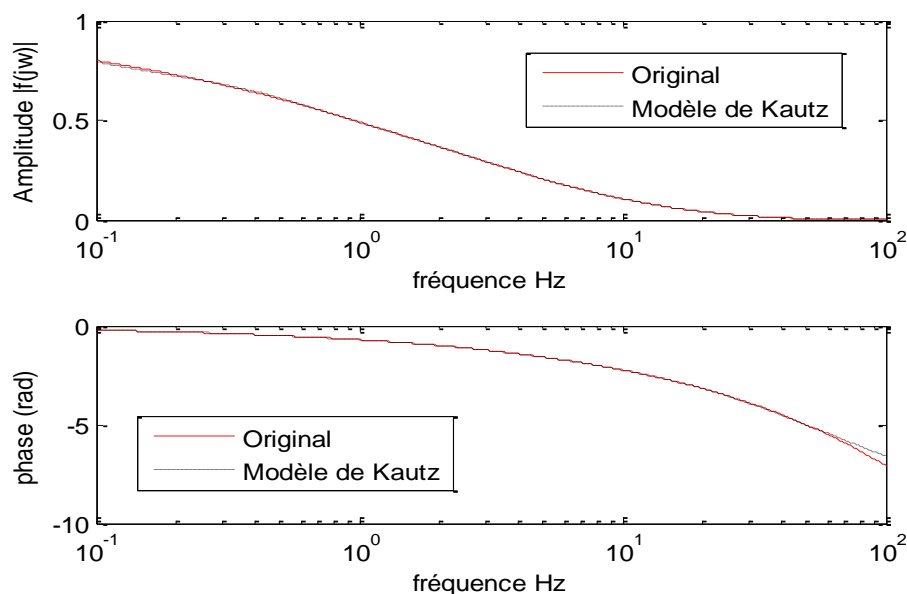


Figure III.9 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle KOR d'ordre 6

L'erreur quadratique relative est très faible, à la 3^{ème} itération elle vaut $E_{qr} = 2,36 \cdot 10^{-4}$. Nous pouvons comparer les erreurs quadratiques relatives pour les différents modèles suivants :

1. Modèle réduit d'ordre $R = 6$ obtenu dans [Tan05], en utilisant la méthode combinant les dérivées et intégrales de $f(t)$ (décrite sections I.2.1. et I.2.2)
2. Modèle réduit d'ordre $R = 6$ proposé dans [Amg05], en utilisant la méthode Laguerre-Gram (décrite section I.2.3.) appliquée au modèle de Laguerre d'ordre $N = 100$ calculé pour le paramètre de Laguerre $\alpha = \sqrt{6} = 2,45$
3. Modèle d'ordre $R = 6$ proposé dans [Hsu90]
4. Modèle réduit d'ordre $R = 6$ construit en utilisant la méthode développée via les fonctions de Kautz, avec $N = 50$ coefficients, et calculé pour $\alpha = [10^{-2} ; 10^3 ; 1 ; 10 ; 10^{-1} ; 10^4]$
5. Modèle optimal d'ordre $R = 6$ obtenu par un algorithme itératif de Gauss-Newton [Der94]. Il est à noter que cet algorithme d'optimisation nécessite un bon modèle réduit de départ.

Les erreurs quadratiques obtenues pour ces différents modèles sont données tableau III.5.

	1	2	3	4	5
	Dérivées/Intégrales	Laguerre-Gram	[Hsu90]	KOR	Optimal
Eqr	$9,81 \cdot 10^{-4}$	$4,54 \cdot 10^{-4}$	$1,69 \cdot 10^{-3}$	$2,36 \cdot 10^{-4}$	$1,45 \cdot 10^{-4}$

Tableau III.5 : Erreurs quadratiques relatives obtenues pour différents modèles réduits d'ordre 6

La valeur de l'erreur quadratique obtenue à l'aide la méthode KOR est plus faible que celles obtenues par les méthodes antérieures et par [Hsu90] et s'approche de la valeur optimale.

Nous avons calculé plusieurs modèles réduits d'ordre 6 à partir de jeux de pôles initiaux différents. Comme pour l'exemple de Lucas (paragraphe IV.1) nous pouvons observer dans le tableau III.6 l'évolution des pôles lors des trois premières itérations.

Jeu initial de paramètres $\bar{\alpha}$	itération	$\{ 10^{-2}; 10^3; 1; 10; 10^{-1}; 10^4 \}$	$\{ 5+j; 5-j; 2+j; 2-j; 13; 2 \}$	$\{ 90; 2; 55; 7; 10^{-2}; 5 \}$
P₁	1 ^{ère} itér	-2,00	$-9,36 \cdot 10^{-1}$	$-6,84 \cdot 10^{-1}$
	2 ^{ème} itér	-2,48	-2,96	-2,90
	3 ^{ème} itér	-2,86	-2,86	-2,86
P₂	1 ^{ère} itér	$-2,90 \cdot 10^{-1}$	-3,12	$-2,85 \cdot 10^{+1}$
	2 ^{ème} itér	$-4,37 \cdot 10^{-1}$	$-6,99 \cdot 10^{-1}$	$-6,12 \cdot 10^{-1}$
	3 ^{ème} itér	$-6,01 \cdot 10^{-1}$	$-6,02 \cdot 10^{-1}$	$-6,01 \cdot 10^{-1}$
P₃	1 ^{ère} itér	$-2,41 \cdot 10^{-2}$	$-1,69 \cdot 10^{-1}$	$-7,21 \cdot 10^{-2}$
	2 ^{ème} itér	$-5,66 \cdot 10^{-1}$	$-6,15 \cdot 10^{-1}$	$-3,05 \cdot 10^{+1}$
	3 ^{ème} itér	$-2,81 \cdot 10^{+1}$	$-2,81 \cdot 10^{+1}$	$-2,79 \cdot 10^{+1}$
P₄	1 ^{ère} itér	$-9,18 \cdot 10^{-1}$	$-1,14 \cdot 10^{+1}$	$-6,41 \cdot 10^{-2}$
	2 ^{ème} itér	$-7,71 \cdot 10^{-1}$	$-7,56 \cdot 10^{-2}$	$-7,25 \cdot 10^{-2}$
	3 ^{ème} itér	$-7,24 \cdot 10^{-2}$	$-7,25 \cdot 10^{-2}$	$-7,24 \cdot 10^{-2}$
P₅	1 ^{ère} itér	$-1,25 \cdot 10^{+1} - 1,68 \cdot 10^{+1} j$	$-2,39 \cdot 10^{+1} - 5,15 j$	$-4,93 \cdot 10^{+1} - 2,56 \cdot 10^{+1} j$
	2 ^{ème} itér	$-2,90 \cdot 10^{+1} - 1,27 \cdot 10^{+1} j$	$-3,92 \cdot 10^{+1} - 2,03 \cdot 10^{+1} j$	$-4,00 \cdot 10^{+1} - 1,79 \cdot 10^{+1} j$
	3 ^{ème} itér	$-3,95 \cdot 10^{+1} - 1,92 \cdot 10^{+1} j$	$-3,95 \cdot 10^{+1} - 1,92 \cdot 10^{+1} j$	$-3,94 \cdot 10^{+1} - 1,95 \cdot 10^{+1} j$
P₆	1 ^{ère} itér	$-1,25 \cdot 10^{+1} + 1,68 \cdot 10^{+1} j$	$-2,39 \cdot 10^{+1} + 5,15 j$	$-4,93 \cdot 10^{+1} + 2,56 \cdot 10^{+1} j$
	2 ^{ème} itér	$-2,90 \cdot 10^{+1} + 1,27 \cdot 10^{+1} j$	$-3,92 \cdot 10^{+1} + 2,03 \cdot 10^{+1} j$	$-4,00 \cdot 10^{+1} + 1,79 \cdot 10^{+1} j$
	3 ^{ème} itér	$-3,95 \cdot 10^{+1} + 1,92 \cdot 10^{+1} j$	$-3,95 \cdot 10^{+1} + 1,92 \cdot 10^{+1} j$	$-3,94 \cdot 10^{+1} + 1,95 \cdot 10^{+1} j$

Tableau III.6 : Convergence des pôles au bout de 3 itérations pour différents jeux de paramètres

Sur cet exemple, les trois configurations conduisent à des résultats quasi-identiques dès la 3^{ème} itération. La méthode est peu sensible au choix du jeu initial de paramètres $\bar{\alpha}$ et ne nécessite pas un critère particulier pour choisir la configuration la plus adaptée à l'exemple.

Nous avons reporté dans le tableau III.7 les valeurs de l'erreur quadratique associées à chaque jeu initial de paramètres. Nous constatons que les valeurs de l'erreur quadratique convergent vers le même résultat quelles que soient la configuration et les valeurs du jeu de paramètres de départ. On constate également que cette convergence est très rapide (trois à quatre itérations suffisent ici) mais qu'elle peut évidemment dépendre du jeu de pôles initial.

Jeu de paramètres initial $\vec{\alpha}$	Itération	Erreur quadratique
$\{10^{-2}; 10^3; 1; 10; 10^{-1}; 10^4\}$	1ère itér	$2,02 \cdot 10^{-3}$
	2ème itér	$4,92 \cdot 10^{-4}$
	3ème itér	$2,36 \cdot 10^{-4}$
	4ème itér	$1,82 \cdot 10^{-4}$
$\{5+j; 5-j; 2+j; 2-j; 13; 2\}$	1ère itér	$6,07 \cdot 10^{-4}$
	2ème itér	$3,33 \cdot 10^{-4}$
	3ème itér	$1,81 \cdot 10^{-4}$
$\{90; 2; 55; 7; 10^{-2}; 5\}$	1ère itér	$2,35 \cdot 10^{-4}$
	2ème itér	$1,77 \cdot 10^{-4}$
	3ème itér	$1,81 \cdot 10^{-4}$

Tableau III.7 : Convergence des pôles au bout de 3 ou 4 itérations pour différents jeux de paramètres

III.5.3. Exemple de Lepschy

Considérons le système d'ordre 7, présenté dans l'article de Lepschy [Lep91]. Le but est de déterminer un modèle réduit d'ordre 4 approchant le mieux possible le module et la phase du modèle original. La transformée de Laplace à modéliser est donnée par

$$\hat{f}(s) = \frac{2s^6 + 11.5s^5 + 57.75s^4 + 178.625s^3 + 345.5s^2 + 323.625s + 94.5}{s^7 + 10s^6 + 46s^5 + 130s^4 + 239s^3 + 280s^2 + 194s + 60}$$

En utilisant la méthode développée avec les deux bases de fonctions, on détermine les modèles $\hat{f}(s) \approx \hat{h}(s)$. Nous considérons un modèle de Müntz-Laguerre de $\hat{f}(s)$ à l'aide de $I = 1024$ points de calcul pour la FFT et $N = 10$ coefficients seulement. Les paramètres initiaux des fonctions de Müntz-Laguerre ont été choisis réels de manière arbitraire, et sont donnés par $\vec{\alpha} = \{1, 20, 5, 7\}$. Ce modèle sert de point de départ pour constituer un ensemble $\Omega_R = \{\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_R\}$ avec $\hat{f}_0(s) \approx \hat{f}(s)$ et $R = 4$. La résolution de la matrice de Gram avec l'opérateur de réduction nous fournit le modèle réduit à l'ordre $R = 4$. La fonction de transfert réduite est donnée par

$$\hat{h}(s) = \frac{(1,96 - 6,02 \cdot 10^{-3} j) s^3 + (2,10 + 3,85 \cdot 10^{-2} j) s^2 + (27,87 - 9,36 \cdot 10^{-2} j) s + (13,57 + 1,18 j)}{s^4 + (4,98 - 3,22 \cdot 10^{-2} j) s^3 + (12,51 + 2,24 \cdot 10^{-1} j) s^2 + (15,98 - 2,14 \cdot 10^{-1} j) s + 8,61 + 6,42 \cdot 10^{-1} j}$$

Le module et la phase du modèle original, et ceux du modèle réduit MLOR, sont tracés sur la figure III.10. Nous constatons que ce modèle réduit est de très bonne qualité. Nous aboutissons à une erreur quadratique relative valant à la 3^{ème} itération $E_{qr} = 1,32 \cdot 10^{-4}$.

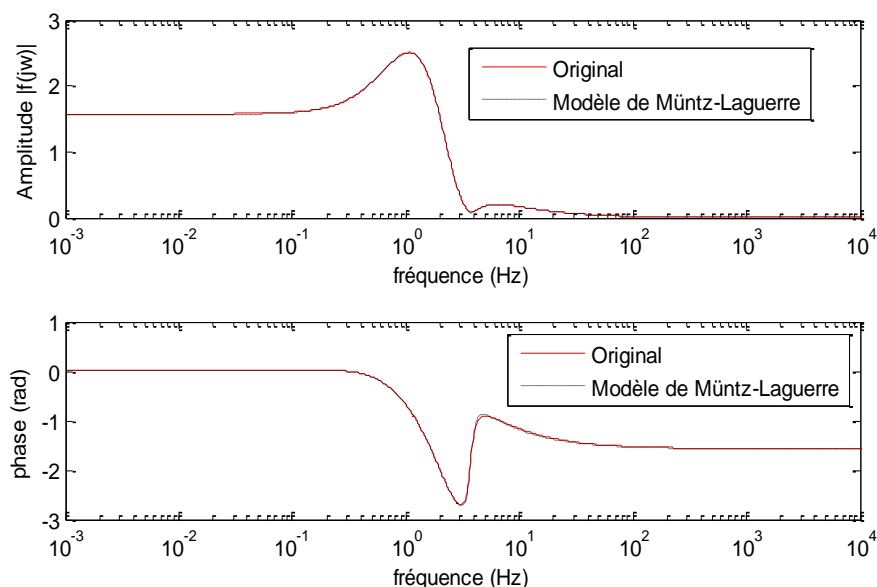


Figure III.10 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle MLOR d'ordre 4

Pour la réduction via la méthode KOR, les troncatures des bases de Kautz ont été également effectuées pour $N=10$ coefficients et les paramètres initiaux sont également $\vec{\alpha} = \{1, 20, 5, 7\}$. Un modèle réduit d'ordre 4 est obtenu. La fonction de transfert réduite à l'ordre $R=4$ à la 4^{ème} itération est donnée par

$$\hat{h}(s) = \frac{1,97 s^3 + 2,08 s^2 + 28 s + 13,06}{s^4 + 5,02 s^3 + 12,43 s^2 + 15,93 s + 8,34}$$

La réduction de la fonction de transfert $\hat{f}(s)$ conduit à des résultats fort satisfaisants. Le module et la phase du modèle original et ceux du modèle KOR sont tracés sur la figure III.11.

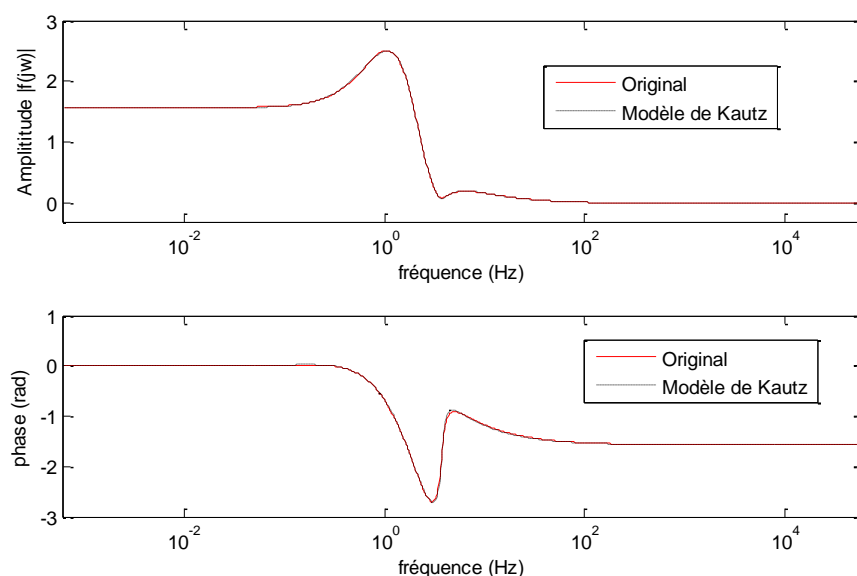


Figure III.11 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle KOR à l'ordre 4

Nous observons sur la figure III.12 que le modèle réduit obtenu suit fidèlement le modèle de référence, les courbes du module et de la phase de notre modèle réduit à l'ordre 4 et de celui de référence sont quasiment superposées. L'erreur quadratique relative commise lors de la réduction, vaut à la 3^{ème} itération $E_{qr} = 6,93 \cdot 10^{-5}$.

Nous constatons que cette approche donne des résultats très précis même lorsque le nombre de coefficients pris en compte est très faible. Notons que, $N = 10$ est un nombre assez faible tant que les paramètres $\vec{\alpha}$ ne sont pas bien choisis.

Nous regroupons les erreurs engendrées dans le tableau III.8.

Itération	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}	10 ^{ème}
Modèle MLOR	$1,53 \cdot 10^{-2}$	$3,91 \cdot 10^{-3}$	$1,32 \cdot 10^{-4}$	$6,82 \cdot 10^{-5}$	$6,68 \cdot 10^{-5}$	$6,78 \cdot 10^{-5}$
Modèle KOR	$1,49 \cdot 10^{-2}$	$2,50 \cdot 10^{-3}$	$6,93 \cdot 10^{-5}$	$6,73 \cdot 10^{-5}$	$6,73 \cdot 10^{-5}$	$6,73 \cdot 10^{-5}$

Tableau III.8 : Erreurs quadratiques relatives obtenues pour les modèles MLOR et KOR sur 10 itérations

Dans le tableau III.8 sont données les erreurs quadratiques relatives obtenues pour les modèles MLOR et KOR sur 10 itérations. Nous constatons que l'algorithme converge dès la 4^{ème} itération, l'erreur est quasiment la même pour les itérations suivantes, ce qui justifie que 4 itérations de la méthode suffisent à obtenir un modèle réduit de très bonne qualité.

III.5.4. Exemple de Spanos

Un autre exemple intéressant est extrait de l'article de Spanos [Spa92]. La fonction de transfert étudiée est d'ordre 4, elle se présente sous la forme

$$\hat{f}(s) = \frac{s^2 + 15s + 50}{s^4 + 5s^3 + 33s^2 + 79s + 50}$$

Nous considérons un modèle de Müntz-Laguerre $\hat{f}(s)$ à l'aide de $N = 50$ coefficients et pour un calcul de FFT à $I = 1024$ points. Les paramètres des fonctions de Müntz-Laguerre de départ ont été choisis réels de manière arbitraire, et sont donnés par $\vec{\alpha} = \{10, 0.7\}$. La figure III.12 représente les modules et les phases des modèles original et réduit à l'ordre 2.

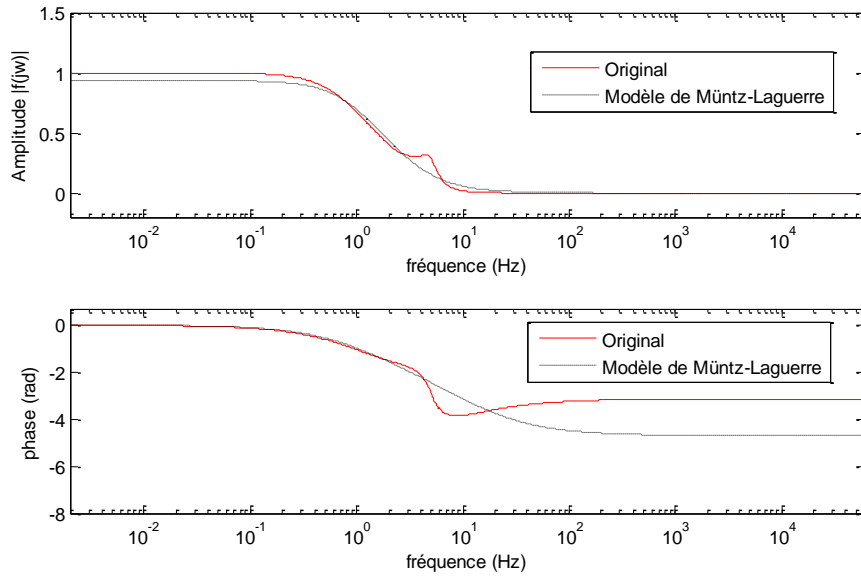


Figure III.12 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle MLOR à l'ordre 2

Nous constatons que le modèle réduit auquel nous aboutissons, correspond à une erreur quadratique relative faible, elle vaut alors à la 3^{ème} itération $E_{qr} = 6,52 \cdot 10^{-2}$. La fonction de transfert réduite à l'ordre $R = 2$ donnée par la méthode MLOR est

$$\hat{h}(s) = \frac{-(3,7 \cdot 10^{-2} + 4,65 \cdot 10^{-3} j) s + (5,58 - 3,53 \cdot 10^{-2} j)}{s^2 + (6,28 - 4,2 \cdot 10^{-2} j) s + (6,04 - 3,72 \cdot 10^{-2} j)}$$

Pour la réduction via la méthode KOR, les troncatures des bases de Kautz ont été effectuées à seulement $N=10$ coefficients et les paramètres de départ sont également donnés par $\vec{\alpha} = \{10, 0,7\}$. La fonction de transfert réduite à l'ordre $R = 2$, obtenue à la 3^{ème} itération est donnée par

$$\hat{h}(s) = \frac{-0,30 s + 4,99}{s^2 + 5,966 s + 5,30}$$

Le modèle réduit auquel nous aboutissons correspond à une erreur quadratique relative faible, elle vaut alors à la 3^{ème} itération ($E_{qr} = 6,06 \cdot 10^{-2}$). Les modules et les phases des modèles original et réduit sont tracés sur la figure III.13 et confirment la qualité du modèle réduit.

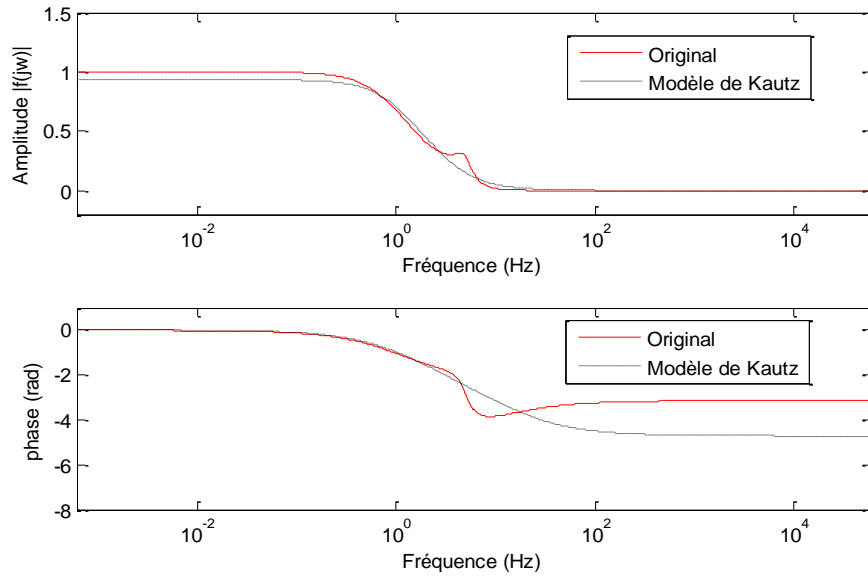


Figure III.13 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle KOR à l'ordre 2

III.5.5. Exemple de Hyland

Les exemples traités jusqu'à présent étaient tous donnés sous forme de fonction de transfert. L'article de D. C. Hyland et D. S. Bernstein [Hyl85], aborde la réduction de système d'état. Le système est présenté sous la forme d'un système d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

où les matrices A, B et C sont données par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -150 \\ 1 & 0 & 0 & -245 \\ 0 & 1 & 0 & -113 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1].$$

Le système est d'ordre 4, et sa fonction de transfert $\hat{f}(s)$ peut être déduite. Nous considérons un modèle de Müntz-Laguerre de $\hat{f}(s)$ à l'aide de $N = 20$ coefficients et pour un calcul de FFT à $I = 1024$. Les paramètres des fonctions de Müntz-Laguerre de départ ont été choisis de manière arbitraire, complexes et conjugués, et sont donnés par $\vec{\alpha} = \{2 \pm 0,01 j\}$.

Le modèle réduit à l'ordre 2 est obtenu, les modules et les phases des modèles original et réduit sont tracés sur les figures III.14.

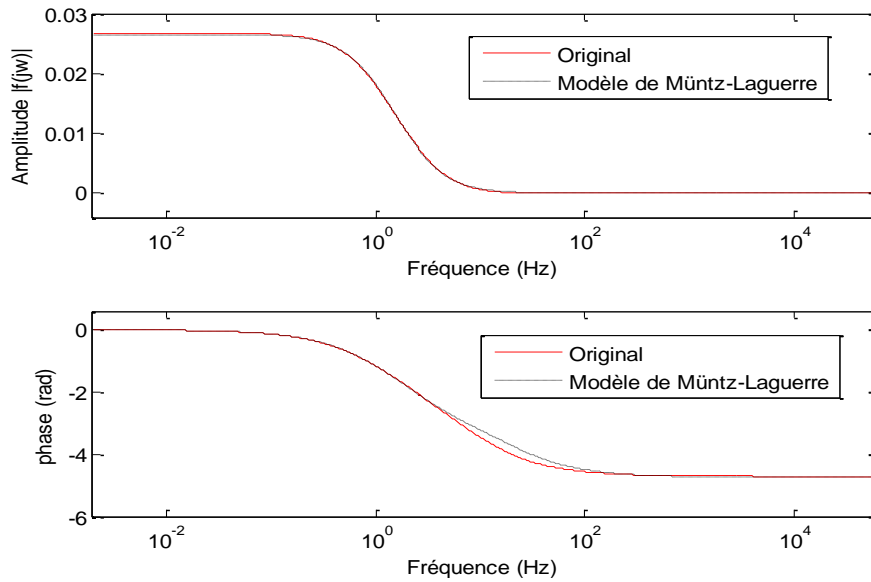


Figure III.14 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle MLOR à l'ordre 2

Le modèle réduit auquel nous aboutissons, correspond à une erreur quadratique relative très faible, elle vaut à la 1^{ère} itération $E_{qr} = 1,45 \cdot 10^{-3}$. La fonction de transfert réduite à l'ordre $R = 2$ donnée par la méthode MLOR est

$$\hat{h}(s) = \frac{-(3,39 \cdot 10^{-3} - 1,17 \cdot 10^{-4} j) s + (7,43 \cdot 10^{-2} - 8,28 \cdot 10^{-4} j)}{s^2 + (3,68 - 4,53 \cdot 10^{-2} j) s + (2,80 - 2,99 \cdot 10^{-2} j)}.$$

Un modèle réduit est également déterminé en utilisant la méthode KOR. Nous considérons initialement un modèle de Kautz de $\hat{f}(s)$ à l'aide de $N = 20$ coefficients pour un calcul de FFT à $I = 1024$ et des paramètres de départ donnés par $\vec{\alpha} = \{2 \pm 0,01 j\}$.

La réduction de la fonction de transfert $\hat{f}(s)$ par la méthode KOR donne des résultats fort satisfaisants. Les modules et les phases des modèles original et réduit sont tracés sur la figure III.15.

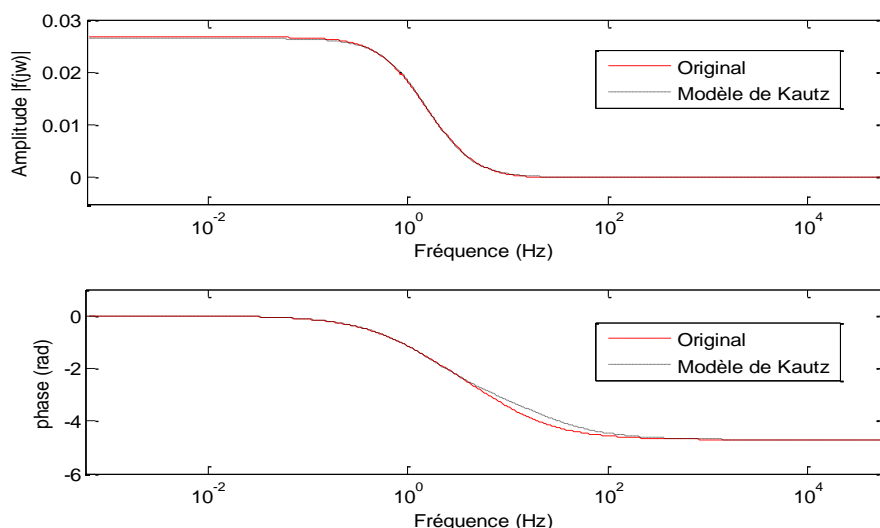


Figure III.15 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle KOR à l'ordre 2

L'erreur quadratique relative est très faible, à la 1^{ère} itération, elle vaut $E_{qr} = 1,55 \cdot 10^{-3}$. La fonction de transfert réduite à l'ordre $R = 2$ donnée par la méthode KOR est

$$\hat{h}(s) = \frac{-3,29 \cdot 10^{-3} s + 7,33 \cdot 10^{-2}}{s^2 + 3,61 s + 2,77}.$$

III.5.6. Bilan et comparaison

Au cours de ce chapitre, nous avons appliqué notre méthode de réduction sur des exemples académiques relativement simples. Les exemples de Lepschy, de Spanos et de Hyland ont déjà été traités dans l'article de Wei-Yong Yan et James Lam [Wei99]. Les auteurs ont testé et comparé sur ces exemples trois méthodes différentes de réduction de modèle, parmi elles :

OP : "Oblique Projection method" une méthode de projection non orthogonale proposée dans [Hyl85], très largement employée pour les problèmes linéaires.

BT : "Balanced Truncation method", méthode de réduction de modèle mise en place par Moore [Moo81], basée sur une troncature des gramiens d'observabilité et de commandabilité de la réalisation équilibrée du système,

GF : "Gradient Flow method" développée dans [Wei99], méthode de projection où la matrice de projection est optimisée afin de minimiser l'erreur quadratique d'approximation. Cette méthode est initialisée avec une troncature dans la base d'équilibre et un algorithme du gradient est employé pour déterminer la matrice de projection optimale. La méthode fournit un modèle stable par construction.

Nous reprenons le tableau de comparaison présenté dans [Wei99], contenant les erreurs quadratiques des exemples de Lepschy, de Spanos et de Hyland obtenus avec les différentes

méthodes GF, OP et BT, et intégrons dans ce tableau les résultats d'erreur quadratique obtenus avec notre méthode KOR, l'ensemble est présenté dans le tableau III.9.

Modèle	Erreur quadratique relative $E_{qr} = \ f - h\ ^2 / \ f\ ^2$					
	Ordre modèle original	Ordre Réduit	KOR	GF Optimale	OP	BT
Lepschy	7	4	$6,73.10^{-5}$	$6,72.10^{-5}$	$6,72.10^{-5}$	$6,76.10^{-5}$
Spanos	4	2	$6,01.10^{-2}$	$5,96.10^{-2}$	Divergent	$1,11.10^{-1}$
Hyland	4	2	$1,55.10^{-3}$	$1,54.10^{-3}$	$1,54.10^{-3}$	$1,55.10^{-3}$

Tableau III.9 : Erreurs quadratiques relatives de modèles obtenus par différentes techniques

Le tableau III.10 permet la comparaison des différents résultats obtenus via Kautz avec les résultats obtenus par les autres techniques. Nous observons que les résultats obtenus par notre méthode KOR sont du point de vue de la précision meilleurs que ceux obtenus par les méthodes OP ("Orthogonal Projection method") et de BT ("Balanced Truncation method") et tout à fait comparables à ceux obtenus par la méthode optimale GF ("Gradient Flow method").

Même si les résultats trouvés par la méthode de GF optimal sont considérés comme de bons résultats, l'algorithme converge très lentement (car algorithme du gradient), il nécessite en général de nombreuses itérations et donc un coût en calcul très important, (environ 50 itérations pour l'exemple de Spanos). Le net avantage de la méthode basée sur l'utilisation des fonctions de Kautz par rapport à cette méthode, réside dans le temps de calcul qui est très court, les solutions étant obtenues après seulement 2 ou 3 itérations. En outre, notre méthode a aussi la capacité de traiter des systèmes irrationnels.

III.5.7. Préservation de la stabilité

La stabilité est une caractéristique importante des systèmes, que l'on souhaite généralement conserver après une opération de réduction d'ordre. Le modèle réduit doit être stable, c'est-à-dire que tous les pôles du modèle réduit doivent être situés dans le demi-plan gauche complexe. Une étude statistique faite sur un très grand nombre d'exemples, nous laisse penser que notre méthode conserve la stabilité, même si à ce jour la démonstration théorique n'a pas abouti.

Nous avons effectué une étude statistique de la stabilité des modèles réduits fournis par la méthode MLOR. Les paramètres initiaux (dont le nombre est compris entre 2 et 22) ainsi que les coefficients du spectre de Müntz-Laguerre sont choisis de manière aléatoire. La répartition du nombre de paramètres et du nombre de coefficients pour cette étude est tracée sur la figure III.16. Nous constatons sur la figure III.16 une répartition de mille points, ils désignent les combinaisons possibles de jeux de paramètres et le nombre de coefficients N.

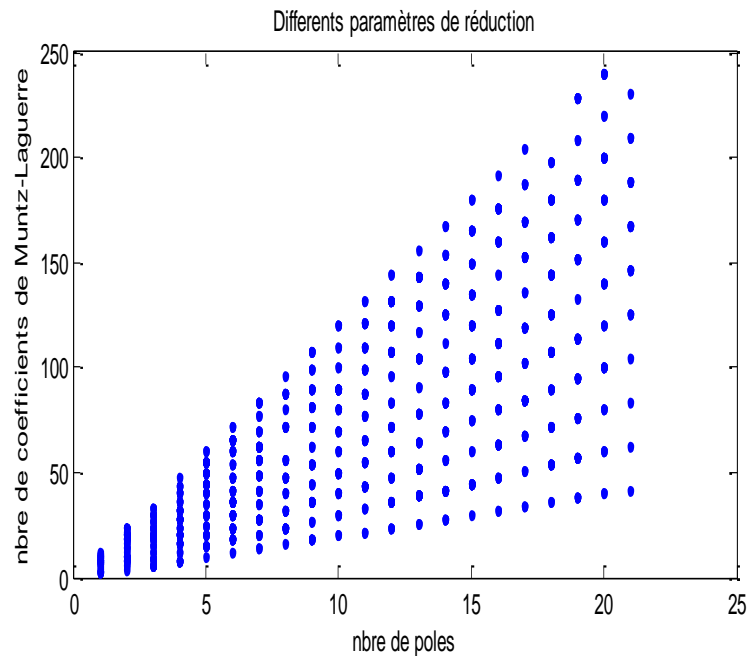


Figure III.16 : Les différents paramètres de réduction pour la méthode MLOR

A partir de là on construit un modèle réduit et on vérifie l'appartenance des pôles au demi-plan gauche complexe. Mille tests sont effectués et tous les pôles sont ensuite tracés sur la figure III.17.

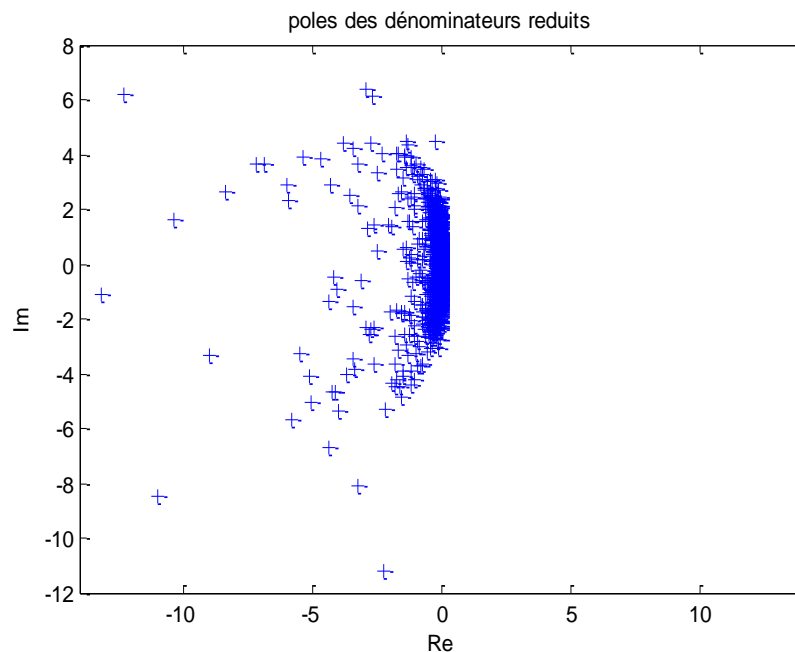


Figure III.17 : Pôles des modèles réduits sur 1000 tests via la méthode MLOR

En examinant les résultats obtenus, nous constatons que tous les pôles des modèles réduits se situent à l'intérieur du demi-plan complexe gauche, et aucun pôle ne figure dans le demi plan droit, nous pouvons donc supposer que cette méthode fournit des modèles réduits stables.

La section suivante est dédiée à l'extension de notre méthode aux systèmes MIMO, pour lesquels les exemples seront donnés dans le chapitre 4.

III.6. Extension de la méthode de réduction aux systèmes MIMO

Après avoir mis au point et testé la méthode de réduction que nous avons présentée dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à la possibilité d'étendre cette technique aux systèmes multi-entrées multi-sorties. Dans le cas de système mono-entrée, mono-sortie, le système étudié est présenté par sa fonction de transfert, notée $\hat{f}(s)$.

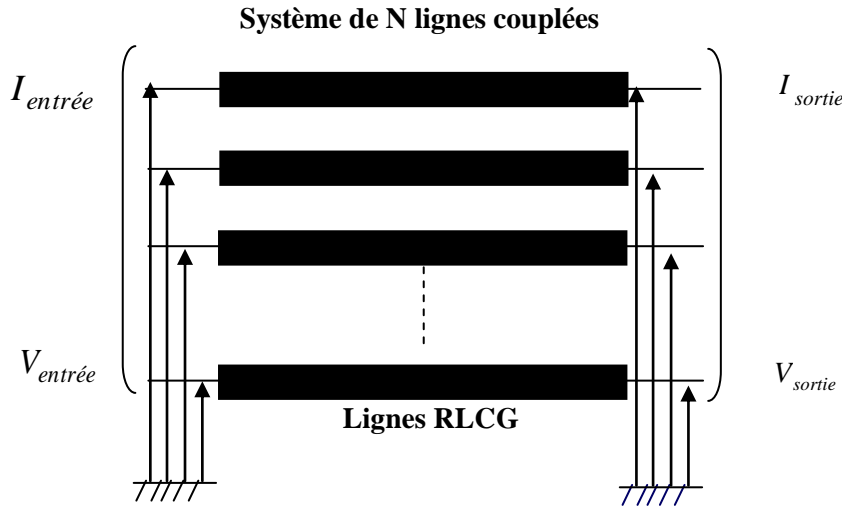


Figure III.18 : Système de N lignes couplées

Un système de N lignes couplées tel que celui représenté figure III.18 est assimilé à un multipôle, il est décrit par une matrice de fonctions de transfert dans le domaine de Laplace. La matrice admittance se présente sous la forme suivante :

$$[Y(s)] = \begin{bmatrix} Y_{1,1}(s) & Y_{1,2}(s) & \dots & Y_{1,p}(s) \\ Y_{2,1}(s) & Y_{2,2}(s) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{m,1}(s) & \dots & \dots & Y_{m,p}(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.44})$$

où m représente le nombre d'entrées et p celui des sorties.

Chaque élément de la matrice $Y_{u,k}(s)$ est une transformée de Laplace $\hat{f}^{(u,k)}(s)$. La matrice $\hat{F}(s)$, se présente sous la forme suivante :

$$[\hat{F}(s)] = \begin{bmatrix} \hat{f}^{(1,1)}(s) & \hat{f}^{(1,2)}(s) & \dots & \hat{f}^{(1,p)}(s) \\ \hat{f}^{(2,1)}(s) & \hat{f}^{(2,2)}(s) & \dots & \hat{f}^{(2,p)}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{f}^{(m,1)}(s) & \hat{f}^{(m,2)}(s) & \dots & \hat{f}^{(m,p)}(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.45})$$

Chaque élément de la matrice $\hat{F}(s)$ est une fonction $\hat{f}(s)$ que nous modélisons simultanément en utilisant les fonctions de Kautz, en suivant les mêmes étapes que pour les systèmes SISO.

Le modèle réduit que nous cherchons à obtenir $\hat{H}(s)$ est :

$$[\hat{H}(s)] = \begin{bmatrix} \hat{h}^{(1,1)}(s) & \hat{h}^{(1,2)}(s) & \dots & \hat{h}^{(1,p)}(s) \\ \hat{h}^{(2,1)}(s) & \hat{h}^{(2,2)}(s) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \hat{h}^{(n,q)}(s) & \dots \\ \hat{h}^{(m,1)}(s) & \dots & \dots & \hat{h}^{(m,p)}(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.46})$$

$\hat{H}(s)$ est une matrice de transfert rationnelle d'ordre réduit. Pour limiter la complexité du modèle réduit, le dénominateur ou bien l'ensemble des pôles selon la représentation choisie doivent être communs à tous les termes de la matrice (ou des sous-matrices si le nombre d'entrées – sorties définissant le système est très grand), c'est à dire

$$\hat{h}^{(n,q)}(s) = \frac{P^{(n,q)}(s)}{Q(s)} \quad (\text{III.47})$$

pour toutes les valeurs de n et q .

Les paramètres \vec{q} du dénominateur sont alors obtenus par la résolution d'un système d'équations similaire à (III.24)

$$\Gamma \vec{q} = -\vec{\xi}$$

où l'on a à présent

$$\Gamma = \sum_{n,q} \Gamma^{(n,q)}$$

et

$$\vec{\xi} = \sum_{n,q} \vec{\xi}^{(n,q)}$$

Ces sommes expriment la contribution cumulée des différentes fonctions du système à modéliser.

Notre algorithme de réduction d'ordre a été implémenté dans une interface graphique intitulée ELSID (Annexe C). Ce dernier travail n'a pas été réalisé dans le cadre de cette thèse.

III.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode de réduction de modèle, efficace et permettant de traiter différents types de problèmes en un temps assez réduit. Elle s'appuie essentiellement sur l'utilisation d'un opérateur linéaire adapté appliqué à une représentation de Müntz-Laguerre ou de Kautz pour générer une base d'approximation.

Les performances de cette méthode de réduction ont été évaluées. De nombreux exemples simples, extraits de la littérature, ont été traités. Durant la simulation nous observons une excellente conservation des paramètres essentiels comme les R premiers coefficients du

système d'origine. Plusieurs critères ont été utilisés pour évaluer la qualité des modèles réduits tels que la convergence des pôles, de l'erreur et la conservation de la stabilité. Nous avons comparé les résultats obtenus par notre nouvel algorithme de réduction à ceux obtenus par des méthodes connues. La comparaison favorable nous permet de valider notre approche.

La méthode a été étendue aux systèmes MIMO. La prochaine étape de ce travail est donc d'appliquer cette méthode à des exemples de systèmes plus sophistiqués de lignes d'interconnexions multi-entrées, multi-sorties.

Chapitre IV : Mise en œuvre et application

IV. Introduction

L'objectif du travail présenté dans ce chapitre consiste à mettre en application les méthodes de modélisation développées durant cette thèse. Dans un premier temps, nous présentons un exemple d'une seule ligne d'interconnexion où les effets de la troncature du spectre sont mis en évidence dans le cas d'un système résonant. Par la suite, nous proposons divers exemples de dispositifs multiports, pour lesquels nous examinons l'extension de cette méthode et montrons son potentiel dans le cadre de la théorie des circuits et de la modélisation de lignes.

IV.1. Exemple d'une ligne de transmission

L'exemple simple choisi pour illustrer la méthode est celui d'une ligne d'interconnexion à charge capacitive, correspondant à la structure de la figure IV.1.

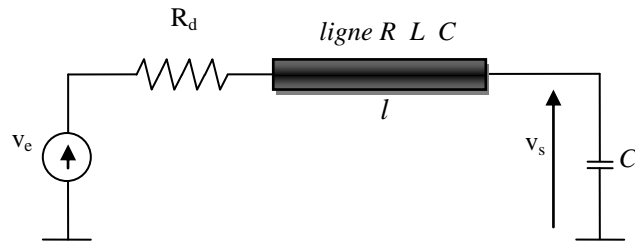


Figure IV.1 : Ligne d'interconnexion avec une charge capacitive

Il s'agit d'une ligne dont les paramètres $RLCG$ sont tirés de Chen et Friedman [Che05]. Elle est caractérisée par les paramètres linéiques $R = 8829 \, \Omega/m$, $L = 1.538 \, \mu H/m$, $C = 180 \, pF/m$ et $G = 0$. La fonction de transfert de ce circuit est

$$\hat{f}(s) = \frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{(1 + R_d C_l s) \cosh \theta + (R_d / Z_c + Z_c C_l s) \sinh \theta} \quad (IV.1)$$

avec $\theta = l\sqrt{(R + sL)sC}$ et $Z_c = \sqrt{(R + sL)/sC}$, l représente la longueur de la ligne, la résistance du générateur vaut $R_d = 30 \, \Omega$ et la capacité de charge $C_l = 50 \, fF$.

Nous procédons à une modélisation via les fonctions de Kautz. Nous effectuons une première modélisation de la ligne à l'aide de 100 fonctions de Kautz ayant toutes leurs paramètres initiaux égaux à 1. Les coefficients sont aisément calculés selon la méthode décrite au chapitre II (paragraphe II.5.1 et II.6.1). Nous avons intégré un paramètre facteur d'échelle dans l'algorithme, il permet de normaliser les fréquences et ainsi d'éviter des problèmes numériques liés à des valeurs de pôles très grandes ou très petites. Pour ces simulations, nous travaillons avec 20 paramètres initiaux unitaires et un facteur d'échelle de $\eta = 10^{-11}$. La longueur de la ligne utilisée est $l = 2 \, mm$.

Nous nous intéressons dans un premier temps aux effets de la troncature des séries à un ordre N . Les figures IV.2 à IV.5 permettent de comparer la réponse fréquentielle exacte aux représentations de Kautz tronquées à $N = 50$, $N = 150$, $N = 300$, $N = 600$. Nous constatons

déjà visuellement l'effet de la troncature : la bande de fréquence sur laquelle il y a une concordance jugée acceptable augmente naturellement avec la valeur de N .

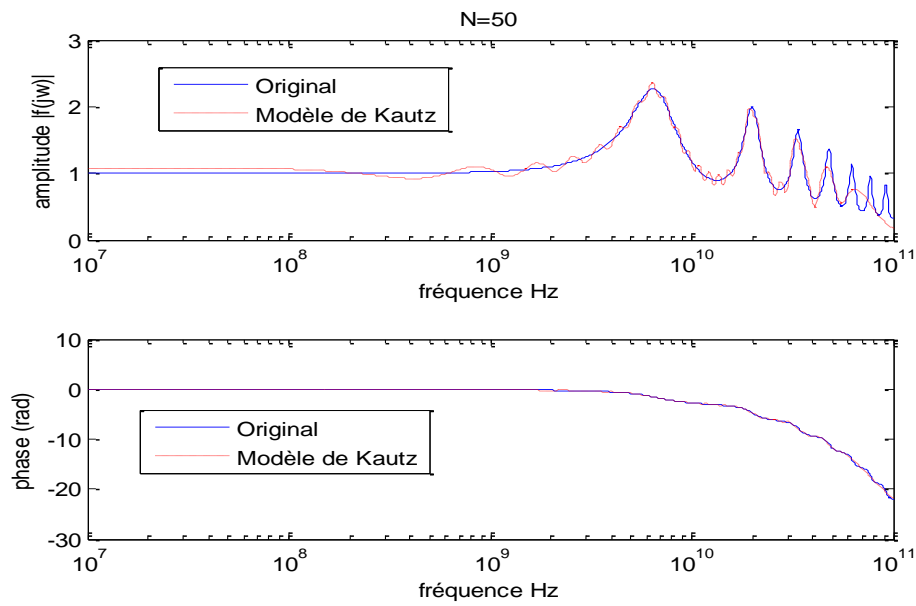


Figure IV.2 : Module et phase du système original et de son modèle de Kautz pour $N = 50$

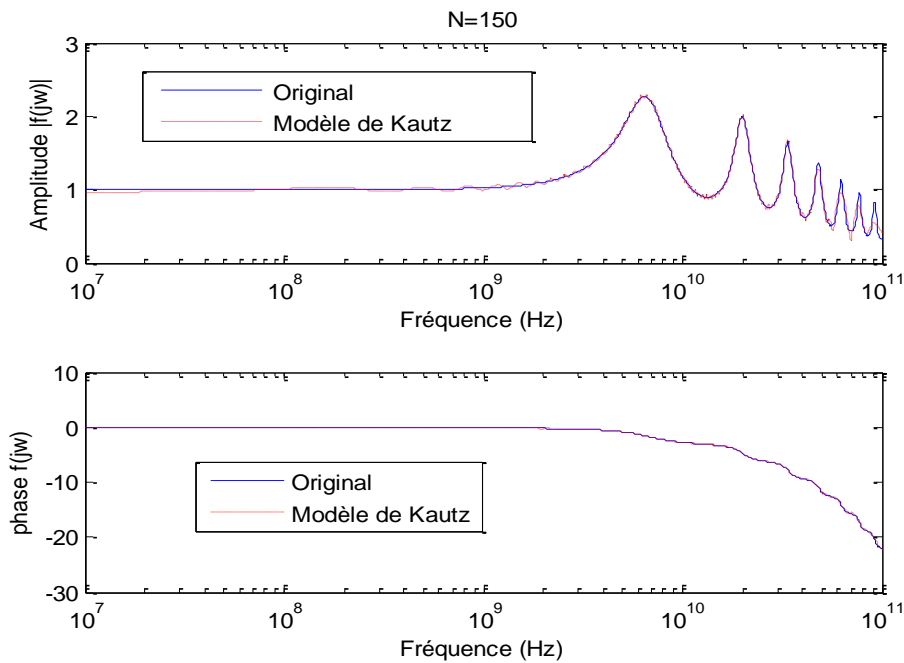
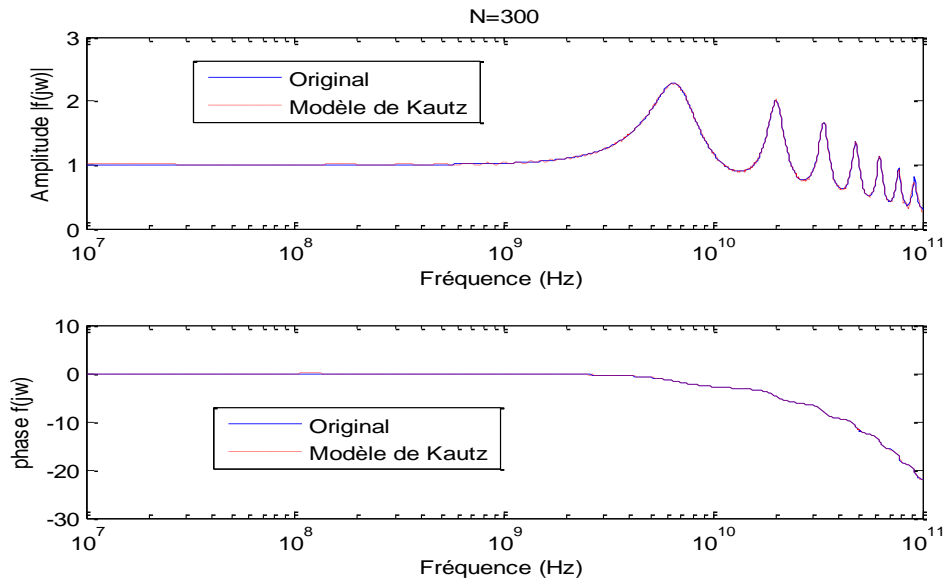
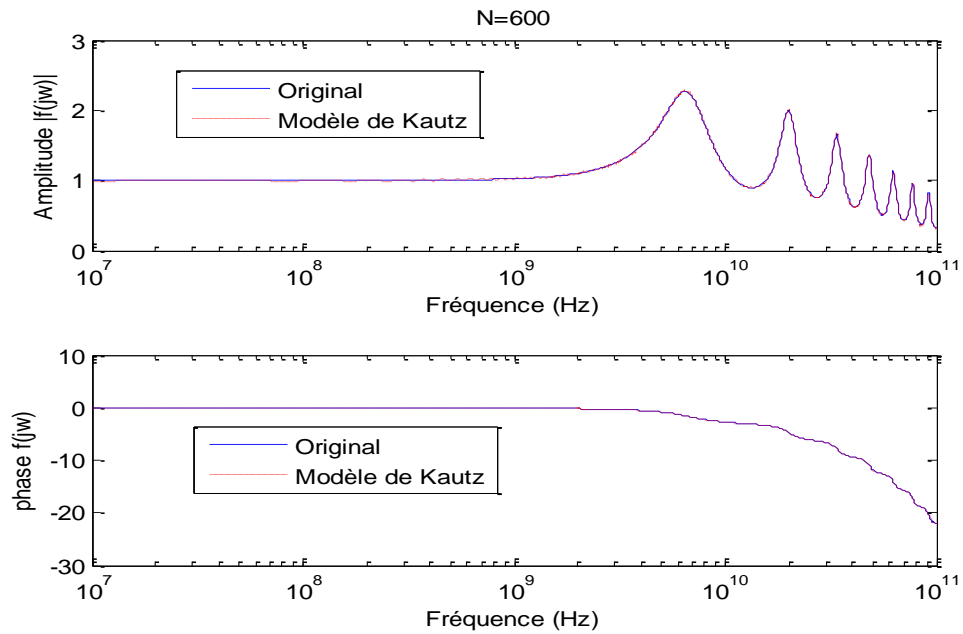


Figure IV.3 : Module et phase du système original et de son modèle de Kautz pour $N = 150$


 Figure IV.4 : Module et phase du système original et de son modèle de Kautz pour $N = 300$

 Figure IV.5 : Module et phase du système original et de son modèle de Kautz pour $N = 600$

La tableau IV.1 fournit les résultats d'erreurs quadratiques relatives $Eqr = \|f - g\|^2 / \|f\|^2$, obtenues entre le modèle de Kautz $\hat{g}(s)$ et le modèle original $\hat{f}(s)$. Nous observons naturellement que l'erreur diminue avec l'augmentation de l'ordre N d'approximation.

Troncature	$N = 50$	$N = 120$	$N = 300$	$N = 600$
Eqr	$1,16 \cdot 10^{-2}$	$1,96 \cdot 10^{-3}$	$3,40 \cdot 10^{-4}$	$1,69 \cdot 10^{-4}$

 Tableau IV.1 : Erreurs quadratiques relatives obtenues pour différentes valeur de N

Nous procédons maintenant à la réduction d'ordre via la méthode KOR utilisant les fonctions de Kautz. Les troncatures des bases sont effectuées à $N=120$ coefficients. Ensuite, nous nous intéressons aux effets de la longueur de la ligne. Les figures IV.6 à IV.9 permettent de comparer la réponse fréquentielle exacte à celle obtenue par les modèles réduits KOR à l'ordre $R=20$ pour des longueurs allant de $0,5\text{ mm}$ à 2 mm . Nous constatons déjà visuellement l'effet de la longueur de la ligne : le nombre d'oscillations et la largeur de la bande de fréquence en haute fréquence augmentent avec la longueur de la ligne.

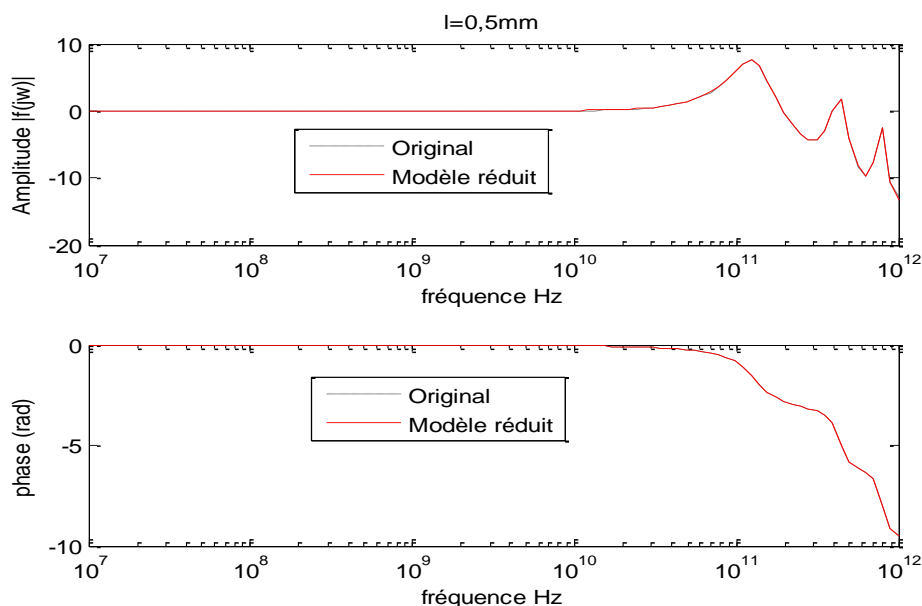


Figure IV.6 : Réponse fréquentielle du système original et du modèle réduit pour $l = 0,5\text{ mm}$

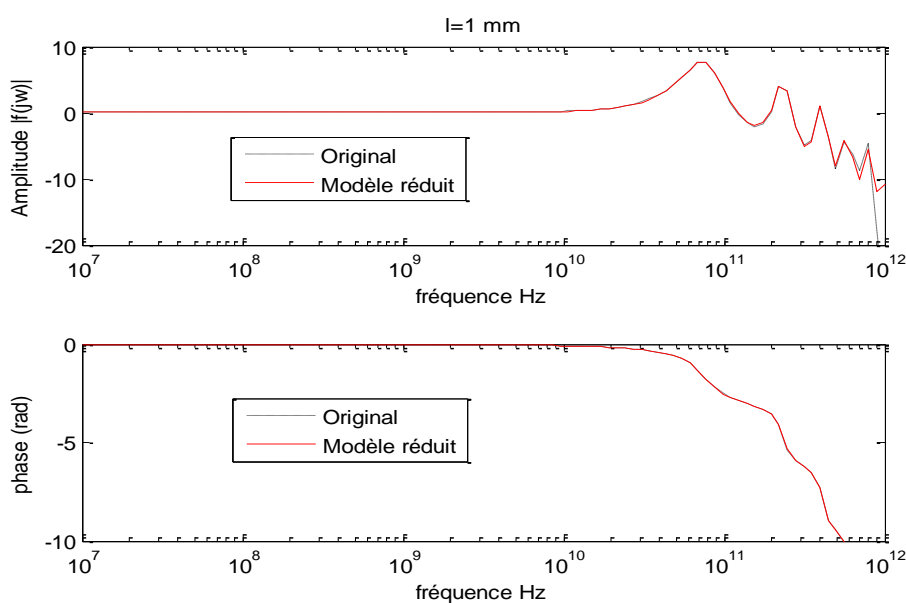


Figure IV.7 : Réponse fréquentielle du système original et du modèle réduit pour $l = 1\text{ mm}$

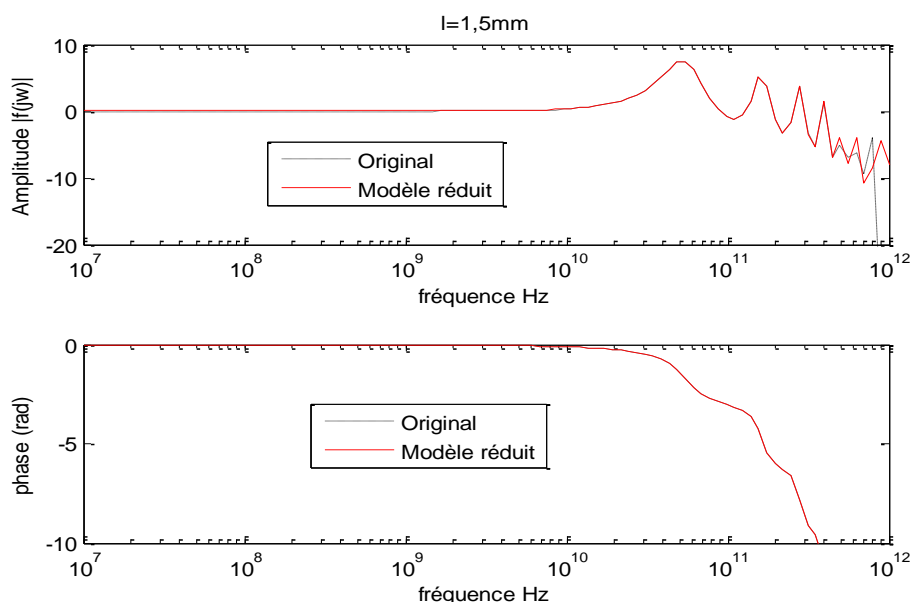


Figure IV.8 : Réponse fréquentielle du système original et du modèle réduit pour $l = 1,5 \text{ mm}$

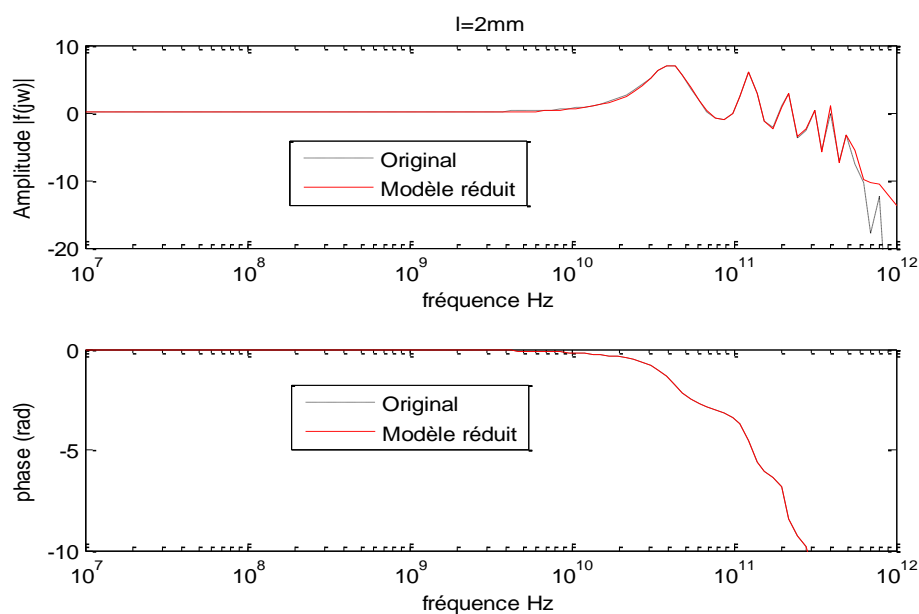


Figure IV.9 : Réponse fréquentielle du système original et du modèle réduit pour $l = 2 \text{ mm}$

Le tableau IV.2 regroupe les erreurs quadratiques relatives obtenues à la 3^{ème} itération pour les différentes longueurs de la ligne.

Longueur de la ligne	$l = 2 \text{ mm}$	$l = 1,5 \text{ mm}$	$l = 1 \text{ mm}$	$l = 0,5 \text{ mm}$
Eqr	$2,02 \cdot 10^{-1}$	$1,70 \cdot 10^{-1}$	$1,17 \cdot 10^{-1}$	$7,86 \cdot 10^{-2}$

Tableau IV.2 : Erreurs quadratiques relatives obtenues pour différentes longueurs de la ligne

Nous observons que les erreurs quadratiques relatives obtenues semblent élevées par rapport à la qualité observée sur une large bande de fréquence, visualisées sur les courbes ci-dessus.

Lorsque nous augmentons la longueur de la ligne, l'erreur croît. Cela peut paraître surprenant mais l'explication réside en partie dans l'accumulation d'erreurs numériques dans le calcul des spectres des fonctions successives de Ω_R . Cela est dû aussi aux phénomènes caractéristiques des lignes de transmission comme les résonances multiples ou comme les retards de propagation qui ont un impact plus fort lorsque les lignes s'allongent.

Nous proposons également, pour le même exemple, l'obtention de modèles réduits d'ordre inférieur à 30. Nous effectuons une réduction via la méthode de Kautz. Les troncatures des bases de Kautz sont effectuées à $N = 120$ coefficients et la longueur de la ligne utilisée est $l = 2 \text{ mm}$.

Le tableau IV.3 montre les valeurs de l'erreur quadratique obtenues à la 3^{ème} itération pour différents ordres de réduction. Nous observons que l'augmentation de l'ordre se traduit naturellement par une diminution de l'erreur quadratique, la méthode conduit au meilleur résultat à l'ordre $R=30$. Ce tableau montre aussi que les lignes de transmissions sont difficiles à modéliser avec des ordres faibles, en raison des nombreux phénomènes de résonances qu'elles font apparaître.

Ordre	$R = 14$	$R = 18$	$R = 24$	$R = 30$
Eqr	$2,83 \cdot 10^{-1}$	$2,05 \cdot 10^{-1}$	$1,96 \cdot 10^{-1}$	$1,84 \cdot 10^{-1}$

Tableau IV.3 : Erreurs quadratiques relatives obtenues pour différents ordre R , $l = 2 \text{ mm}$

IV.1.1. Réponses temporelles

Nous procédons à une réduction via KOR. Les troncatures des bases de Kautz sont effectuées à $N = 50$ coefficients. Les paramètres choisis sont $R = 30$ paramètres initiaux avec un facteur d'échelle $\eta = 10^{-11}$. Cela conduit à un modèle réduit dont la réponse impulsionnelle est tracée figure IV.10. Les modules des réponses fréquentielles sont donnés figure IV.11.

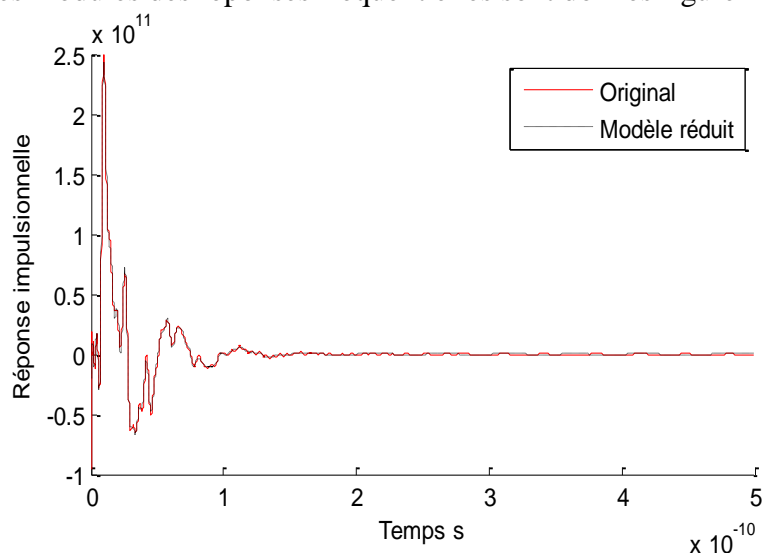


Figure IV.10 : Réponses impulsionnelles du système original et du modèle réduit, $l = 2 \text{ mm}$

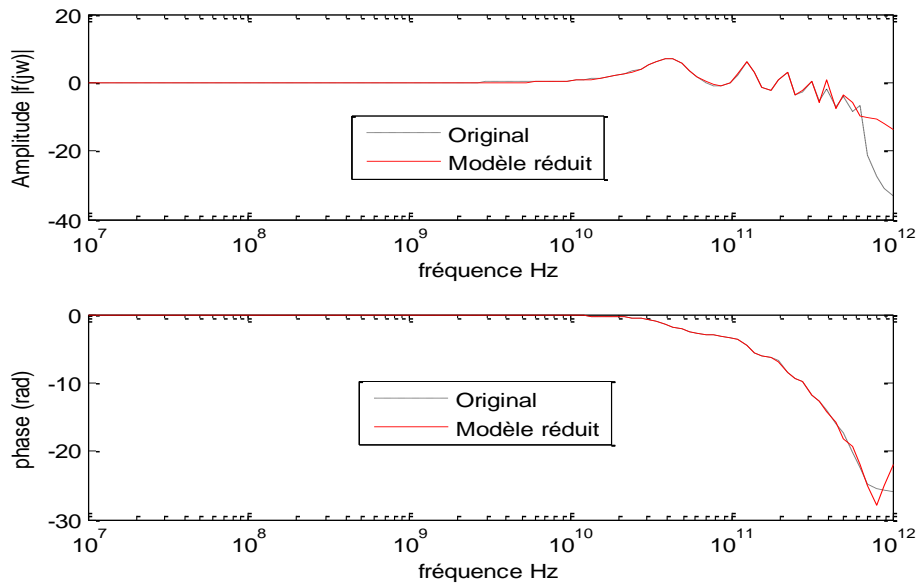


Figure IV.11 : Réponses fréquentielles du système original et du modèle réduit, $l = 2 \text{ mm}$

Nous observons que l'allure du signal en temps est bien conservée et qu'en fréquence la caractéristique du modèle réduit suit celle de l'original. L'erreur quadratique relative est de $Eqr = 1,56 \cdot 10^{-1}$.

IV.2. Exemple de 5 lignes couplées

On considère un système de 5 lignes couplées toutes de longueur égale à un millimètre.

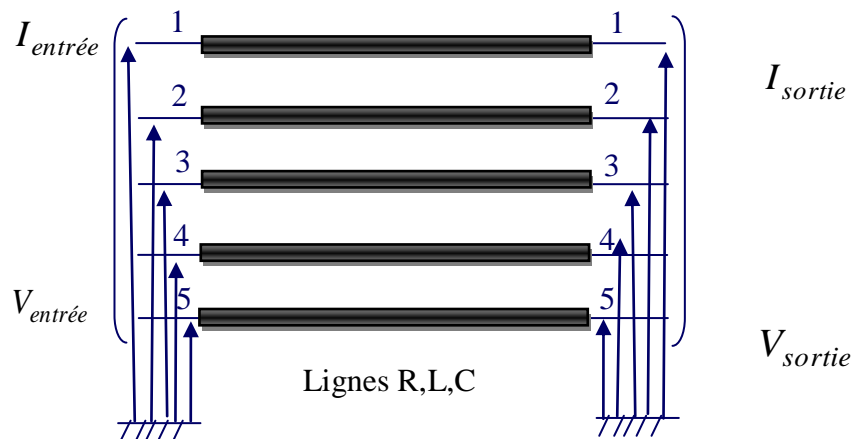


Figure IV.12 : Système de 5 lignes couplées

La résistance de ligne est de $69 \text{ } \Omega/\text{mm}$ et la conductance est nulle. Les capacitances et inductances (respectivement en pF/mm et nH/mm) sont

$$[C] = \begin{bmatrix} 1,63 & 0,52 & 0,036 & 0,016 & 0,01 \\ 0,52 & 1,34 & 0,51 & 0,032 & 0,016 \\ 0,036 & 0,51 & 1,27 & 0,51 & 0,036 \\ 0,016 & 0,032 & 0,51 & 1,34 & 0,52 \\ 0,01 & 0,016 & 0,036 & 0,52 & 1,63 \end{bmatrix} \quad [L] = \begin{bmatrix} 7,47 & 5,22 & 4,07 & 3,36 & 2,84 \\ 5,22 & 7,26 & 5,11 & 4,03 & 3,36 \\ 4,07 & 5,11 & 7,21 & 5,11 & 4,07 \\ 3,36 & 4,03 & 5,11 & 7,26 & 5,22 \\ 2,84 & 3,36 & 4,07 & 5,22 & 7,47 \end{bmatrix}$$

La matrice admittance $[Y]$ du système est composée de 100 fonctions irrationnelles, c'est-à-dire ayant une infinité de pôles, pour lesquelles on cherche une approximation. Le domaine fréquentiel d'étude est compris entre 10 MHz et 40 GHz et comprend 3000 points logarithmiquement espacés en fréquence.

L'approche proposée dans cet exemple consiste à calculer un modèle réduit de Kautz directement à partir des valeurs en fréquence des matrices, issues de simulations électromagnétiques. Pour ce genre d'exemple, nous avons la potentialité d'utiliser ELSID, progiciel spécifique développé par notre équipe, basé sur la méthode développée dans ce manuscrit et présenté en annexe C.

IV.2.1. Fonction poids

Nous introduisons une fonction poids dans l'algorithme de réduction implanté dans ELSID, dans la définition des produits scalaires. Elles s'avèrent extrêmement utiles lorsque nous utilisons comme point de départ des mesures en fréquence. Ne connaissant alors le comportement du système que dans une certaine bande de fréquence, la fonction poids réduit l'impact des contributions en dehors de la bande de mesure.

L'algorithme génère un modèle réduit à 60 pôles d'une grande précision, Sachant que l'ensemble des 60 pôles sont communs aux 100 fonctions de la matrice $[Y]$. La méthode est réitérée jusqu'à l'obtention de la qualité désirée. Sur cet exemple, la méthode est itérée 10 fois, à chaque itération, les pôles associés au dénominateur obtenu serviront à définir les paramètres de Kautz de l'itération suivante.

Les tracés des figures suivantes (Figures IV.13.a à IV.13.d) comparent les modules et les phases de quelques-uns des cent éléments matriciels pour les systèmes d'origine et réduit. Le système étant symétrique, l'élément matriciel Y_{mn} équivaut à l'élément Y_{nm} .

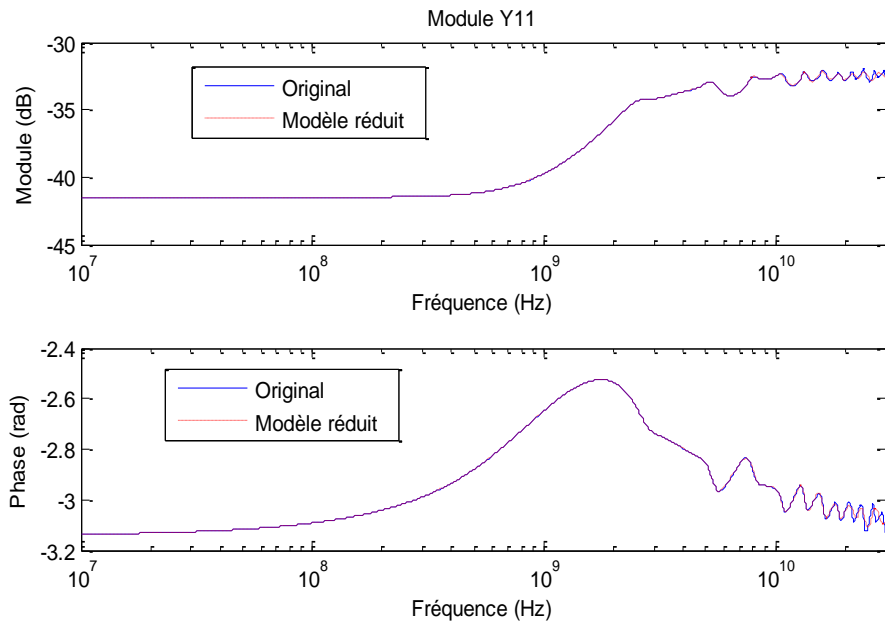


Figure IV.13.a : Comparaison entre le module et la phase de l'élément Y_{11} du système de cinq lignes couplées et ceux de son modèle réduit équivalent.

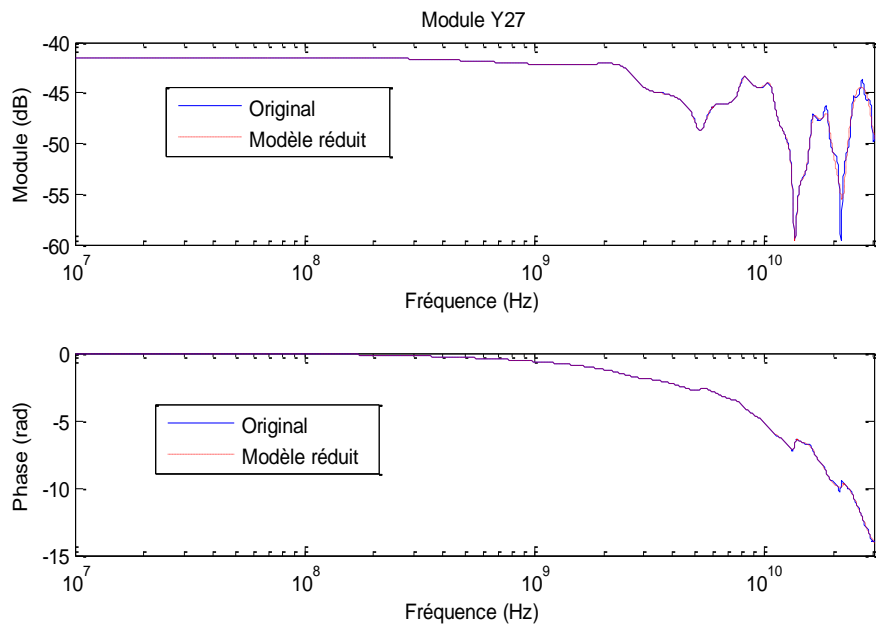


Figure IV.13.b : Comparaison entre le module et la phase de l'élément Y_{27} du système de cinq lignes couplées et ceux de son modèle réduit équivalent.

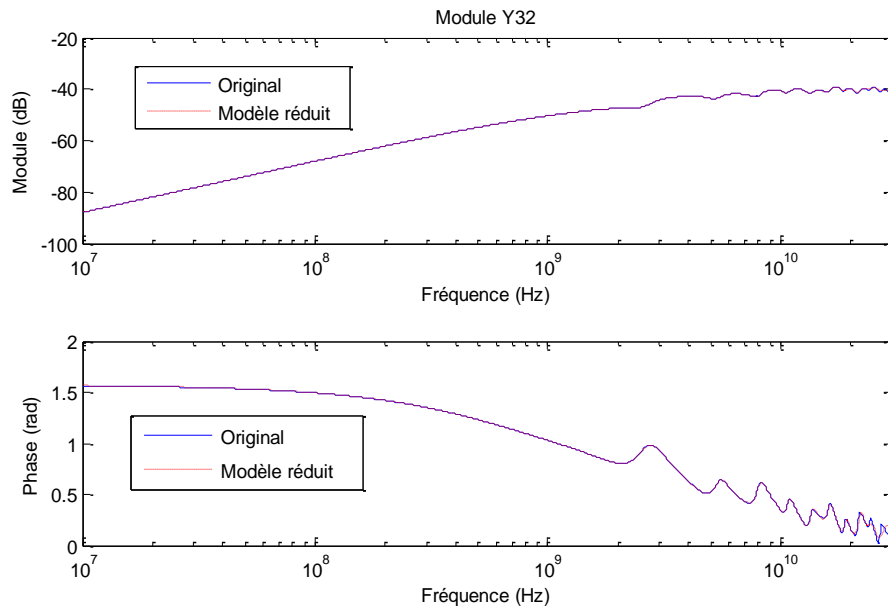


Figure IV.13.c : Comparaison entre le module et la phase de l'élément Y_{32} du système de cinq lignes couplées et ceux de son modèle réduit équivalent.

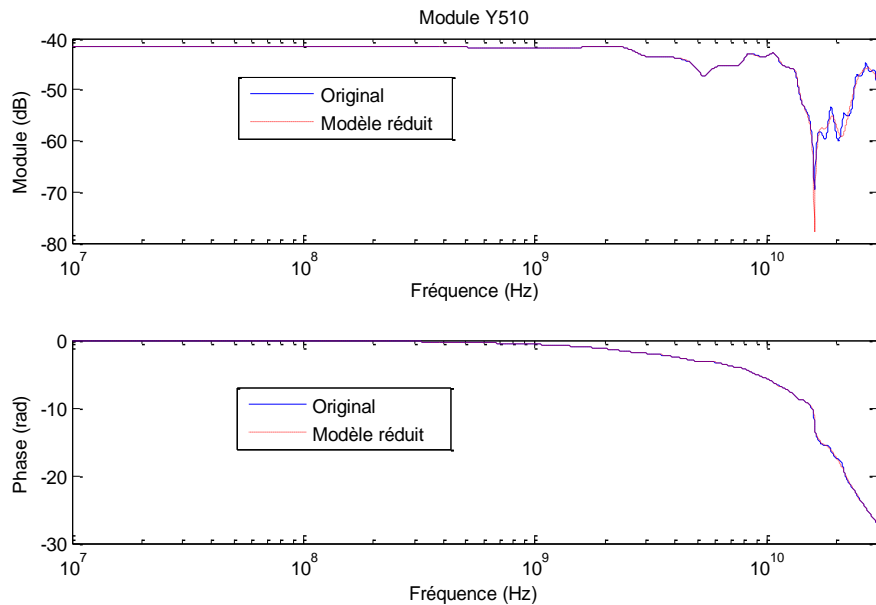


Figure IV.13.d : Comparaison entre le module et la phase de l'élément $Y_{5,10}$ du système de cinq lignes couplées et ceux de son modèle réduit équivalent.

Sur les figures IV.13.a à IV.13.d, nous observons les courbes de nos modèles réduits et celles de référence sur une gamme de fréquences assez large. Nous constatons aussi l'allure des réponses fréquentielles du système à 5 lignes faisant apparaître de nombreux pics de résonance, très difficiles à approcher. D'autre part l'allure des modèles réduits obtenus est quasiment superposée à l'original, l'allure générale des réponses est bien respectée, les réflexions sont reproduites fidèlement.

IV.3. Exemple d'un réseau RLC en arbre

La structure proposée est un réseau d'interconnexions en arbre (Figure IV.14) repris aussi de [Che05]. Les différentes lignes l_x constituant le réseau sont segmentées en 20 cellules élémentaires. Les paramètres linéiques R, L, C sont respectivement $R = 3,9 \Omega/mm$, $L = 0,43 nH/mm$ et $C = 0,36 pF/mm$. Les longueurs des lignes sont telles que $l_1 = l_4 = l_6 = 0,5 mm$, $l_3 = l_7 = 2 mm$ et $l_2 = l_5 = l_8 = l_9 = 1 mm$.

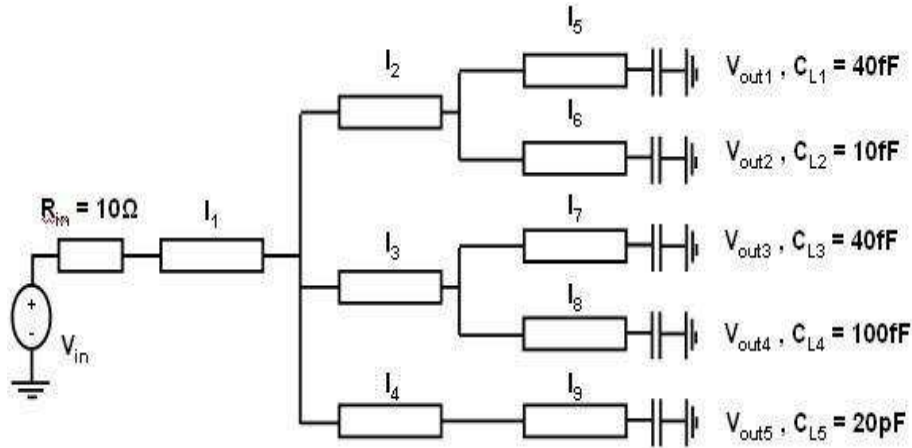


Figure IV.14 : Réseau d'interconnexions en arbre

La matrice admittance $[Y]$ du système est composée de 36 fonctions rationnelles (la matrice est de dimension 6×6 car le système est défini par une entrée et cinq sorties)

$$[Y(s)] = \begin{pmatrix} Y_{1,1}(s) & Y_{1,2}(s) & \dots & Y_{1,6}(s) \\ Y_{2,1}(s) & Y_{2,2}(s) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{6,1}(s) & \dots & \dots & Y_{6,6}(s) \end{pmatrix} \quad (IV.2)$$

Dans un premier temps, le système est décrit sous le logiciel de simulation électrique ADS[®] duquel est exporté un fichier contenant 1000 points de mesures en fréquence pour chacun des 36 éléments de $[Y]$. Les simulations du système sous ADS sont effectuées pour une gamme de fréquence allant de 100MHz à 50GHz, avec des points en fréquence espacés linéairement de 25MHz. Une fois le fichier chargé dans ELSID, le réseau d'interconnexions est modélisé en considérant un nombre de fonctions orthogonales $N=100$ et un facteur d'échelle $\eta = 1.10^{-9}$.

La méthode de réduction est appliquée en considérant un nombre de pôles arbitraire égal à 36. Après 2 itérations, l'algorithme génère un modèle réduit de bonne qualité, les figures suivantes (Figures IV.15.a à IV.15.d) sont des comparaisons de modules et de phases de quelques éléments de la matrice admittance Y des systèmes d'origine et réduit, démontrant encore que cette méthode est capable de générer des modèles d'une grande précision.

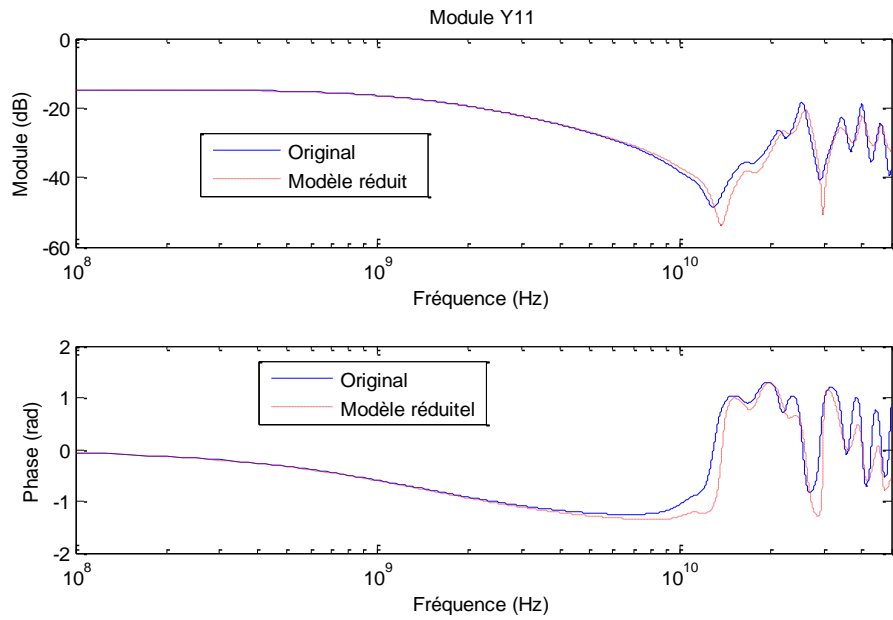


Figure IV.15.a : Comparaison entre le module et la phase de l'élément Y_{11} du réseau d'interconnexions en arbre et ceux de son modèle réduit équivalent.

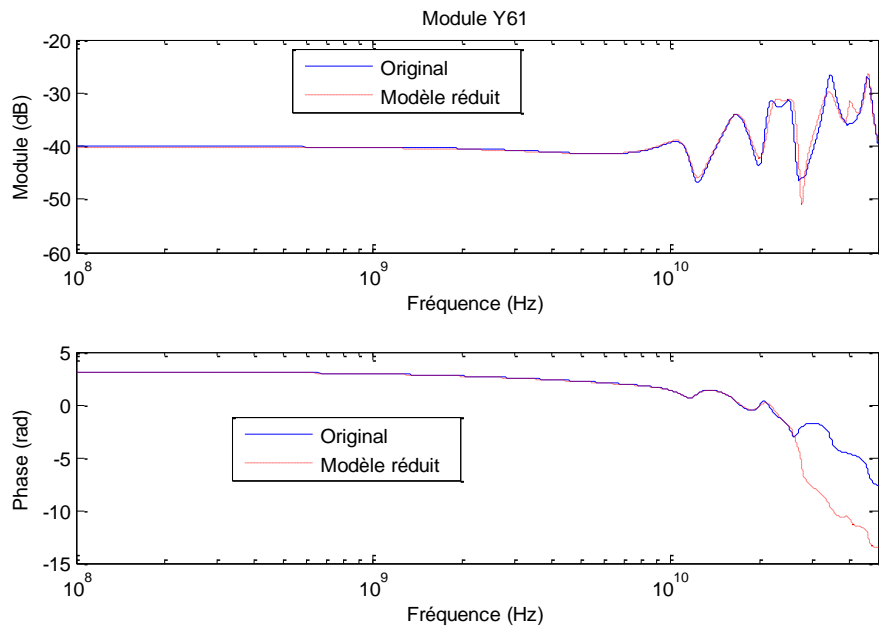


Figure IV.15.b : Comparaison entre le module et la phase de l'élément Y_{61} du réseau d'interconnexions en arbre et ceux de son modèle réduit équivalent.

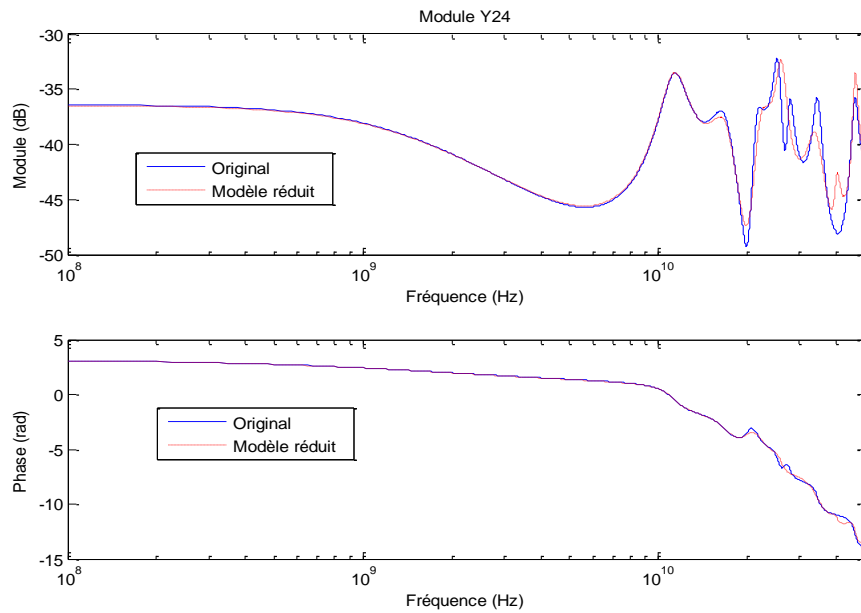


Figure IV.15.c : Comparaison entre le module et la phase de l'élément Y_{24} du réseau d'interconnexions en arbre et ceux de son modèle réduit équivalent.

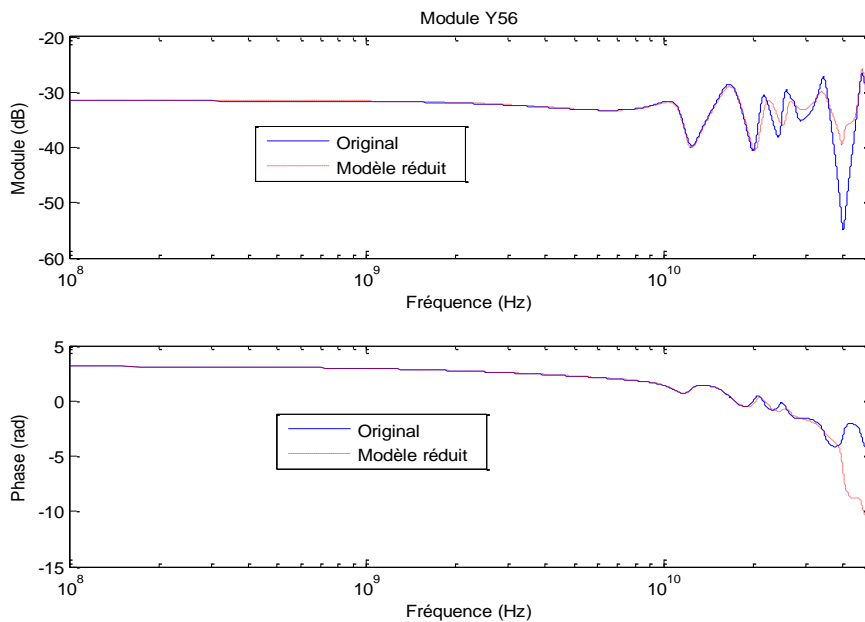


Figure IV.15.d : Comparaison entre le module et la phase de l'élément Y_{56} du réseau d'interconnexions en arbre et ceux de son modèle réduit équivalent.

L'analyse de ces courbes, montre encore l'efficacité de la procédure décrite et utilisée pour la réduction des modèles de réseaux d'interconnexions.

On voit que malgré la complexité des exemples traités, faisant apparaître de nombreux pics de résonance, nous obtenons des modèles rationnels très précis.

IV.4. Exemple d'un boîtier StratEdge

La structure de cet exemple est un boîtier StratEdge représentatif des boîtiers hyperfréquences fonctionnant jusqu'à une fréquence de 10 GHz (figure IV.16). Celui-ci est composé de 5 broches actives et de deux broches inactives de part et d'autre. Le boîtier est en « Or » posé sur un substrat FR4_epoxy ($\epsilon_R = 4,4$, $tg(\delta) = 0,02$, $H_{sub} = 254 \mu m$, $W_{sub} = 29,97 mm$). Ses dimensions sont quant à elles données figure IV.17.

Le boîtier est dessiné sous le simulateur électromagnétique HFSS puis simulé dans le domaine fréquentiel 1 GHz – 25 GHz. Est alors exporté, le fichier touchstone correspondant. Il contient, pour l'ensemble des points en fréquence, les module et phase de chacun des éléments de la matrice de répartition S décrivant le boîtier de dimension 10x10 (5 entrées et 5 sorties).

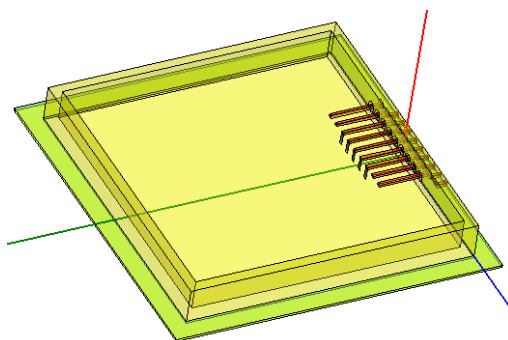


Figure IV.16 : Boîtier StratEdge

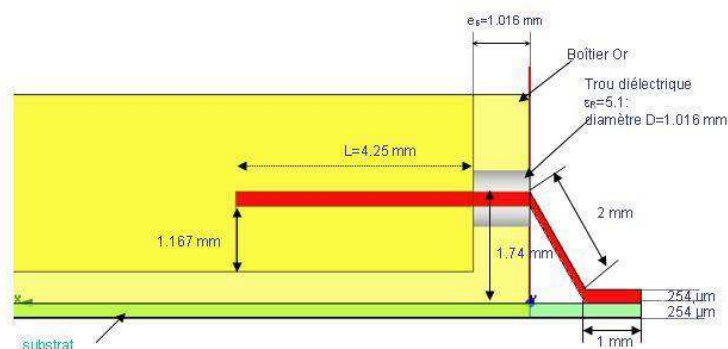


Figure IV.17 : Dimensions du boîtier StratEdge

Le facteur d'échelle choisi est égal à $\eta = 1.10^{-10}$. La méthode de réduction est définie en considérant un nombre de 30 pôles choisis arbitrairement. Nous traçons le module et la phase des éléments matriciels S des systèmes (figures IV.18.a à IV.18.d), on constate que le modèle réduit est assez précis. Le système étant symétrique, l'élément matriciel S_{mm} équivaut à l'élément S_{mm} .

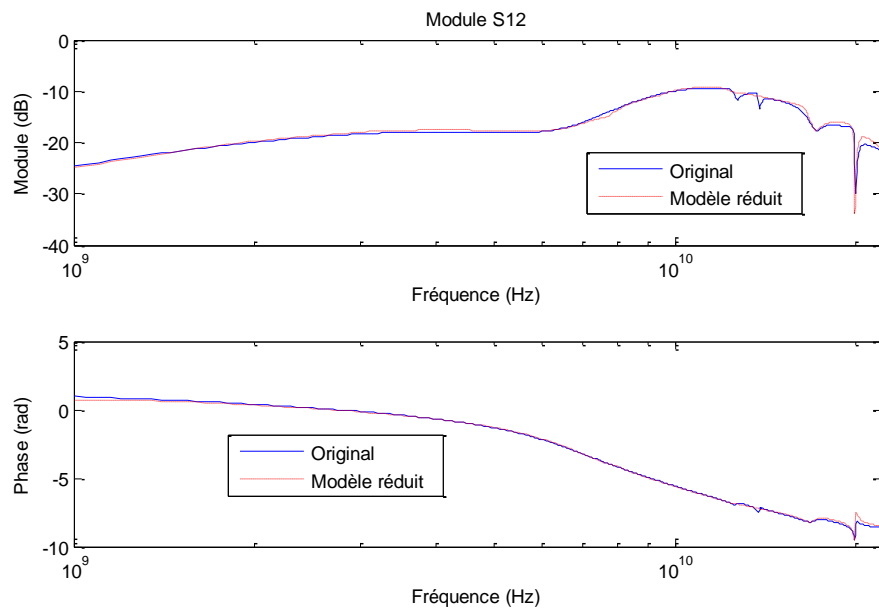


Figure IV.18.a : Comparaison entre le module et la phase de l'élément S_{12} du boîtier StratEdge et ceux de son modèle réduit équivalent.

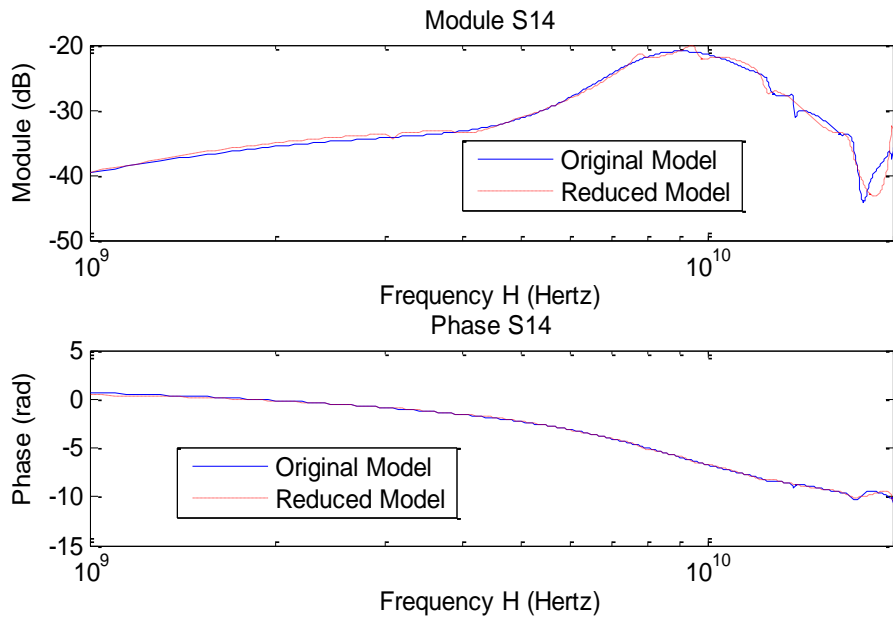


Figure IV.18.b : Comparaison entre le module et la phase de l'élément S_{14} du boîtier StratEdge et ceux de son modèle réduit équivalent.

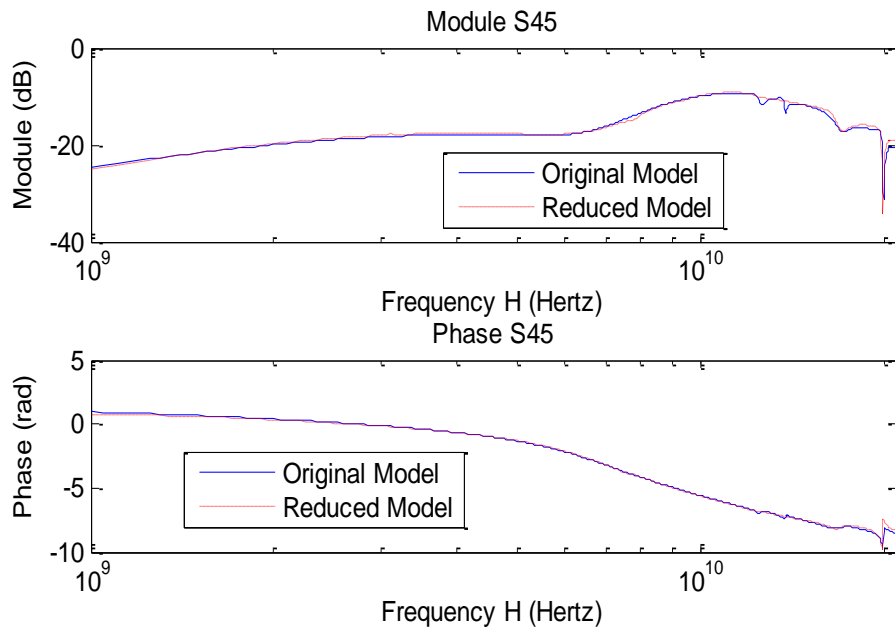


Figure IV. 18.c : Comparaison entre le module et la phase de l'élément S_{45} du boîtier StratEdge et ceux de son modèle réduit équivalent.

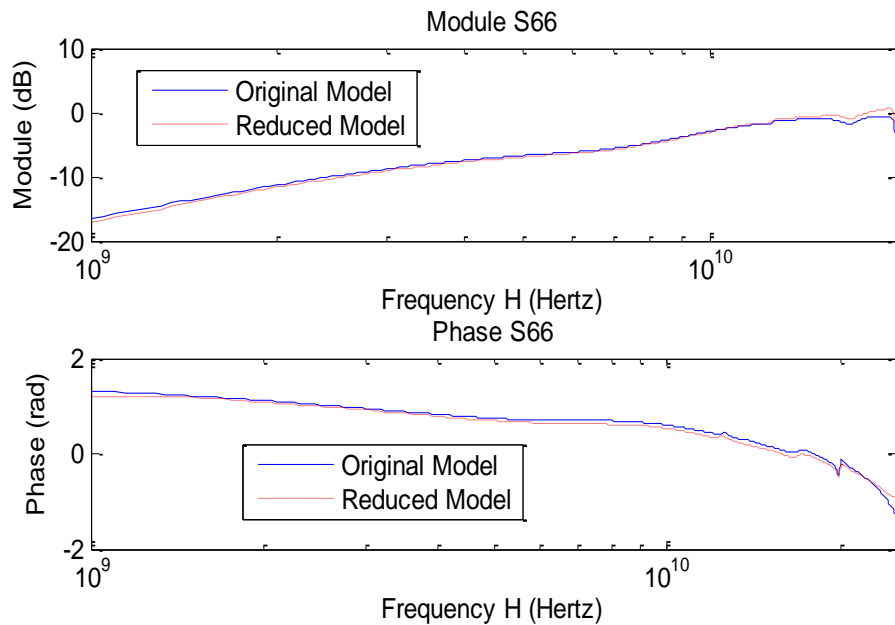


Figure IV. 18.d : Comparaison entre le module et la phase de l'élément S_{66} du boîtier StratEdge et ceux de son modèle réduit équivalent.

IV.5. Conclusion

Dans ce chapitre, les exemples traités sont difficiles car ils font apparaître de nombreux pics de résonance. En premier lieu, nous avons examiné les performances de notre approche dans

le cas d'une seule ligne d'interconnexion, où les effets de la troncature sont mis en évidence sur différentes longueurs de la ligne. Ensuite, la procédure est utilisée avec efficacité pour effectuer la réduction des modèles de réseaux d'interconnexions. Un autre aspect important de notre algorithme est abordé, à savoir la possibilité de modéliser des systèmes directement à partir des paramètres en fréquence issus d'une simulation électromagnétique.

Le point fort de notre approche est son aptitude à réduire les modèles de systèmes résonants, car malgré la difficulté des systèmes traités, elle conduit à des modèles réduits d'une qualité remarquable s'inscrivant bien dans nos objectifs pratiques.

Conclusion et perspectives

Les interconnexions apparaissent à différents niveaux de la hiérarchie des systèmes électroniques, tels que dans les circuits en boîtier (SiP), les cartes de circuits imprimés (PCB),... N'étant pas parfaites, elles dégradent les signaux propagés et sont, de nos jours, l'un des principaux facteurs limitant les performances des systèmes à grande vitesse. Leur prise en compte, dès les premières phases de conception, est une nécessité pour assurer la fiabilité de fonctionnement des systèmes. Pour répondre aux exigences des concepteurs, des modèles simples mais précis doivent être employés afin de ne pas alourdir les temps de calcul lors des simulations temporelles.

L'objectif principal de cette thèse était de proposer un outil permettant la modélisation et la réduction d'ordre des fonctions de transfert des réseaux de connexions intra et inter systèmes électroniques. Nous avons présenté au premier chapitre la problématique des lignes d'interconnexions dans les circuits intégrés en détaillant les effets parasites non négligeables provenant des interconnexions tels que le retard, la diaphonie, l'atténuation... Nous avons également rappelé certaines notions de la théorie des lignes permettant de caractériser les interconnexions et mis en évidence le besoin d'utiliser un outil de réduction d'ordre afin de réduire la complexité des modèles. Nous avons ensuite présenté un état de l'art des différentes méthodes de réduction d'ordre des modèles.

L'outil de réduction de modèle développé comporte deux étapes complémentaires. La première étape, consiste en la modélisation du système considéré à l'aide des fonctions de Müntz-Laguerre ou de Kautz. Le chapitre 2 est dédié à cette étape. Ces fonctions orthogonales rationnelles possèdent des paramètres libres (des pôles réels ou complexes) et peuvent être utilisées de manière efficace pour modéliser les fonctions de transfert de systèmes stables. Dans ce chapitre 2, les caractéristiques principales de ces fonctions ont été discutées. Les principes de l'approximation à l'aide de ces bases de fonctions orthogonales ont également été rappelés. Un algorithme permettant un calcul précis et robuste des coefficients du spectre de Müntz-Laguerre ou de Kautz a ensuite été présenté. Pour terminer cette partie, nous avons vérifié, sur des exemples élémentaires, la qualité des procédures de modélisation mises en œuvre.

La deuxième étape de notre outil est la réduction d'ordre des modèles. Le chapitre 3 est consacré à cette étape. Le modèle approché, obtenu par la méthode présentée au chapitre 2, doit subir une phase de réduction d'ordre. Le principe de la technique est présenté en utilisant deux bases de fonctions orthogonales. Dans cette thèse, les fonctions de Müntz-Laguerre ont été utilisées principalement pour mieux détailler l'approche que nous avons développée. Ce sont des fonctions à paramètres complexes, qui ont été choisies pour la simplicité de leur implémentation mathématique. Dans ce chapitre 3, d'abord, un premier algorithme (MLOR) utilisant ces fonctions de Müntz-Laguerre est décrit de façon détaillée. Il repose sur la construction d'un ensemble de fonctions linéairement indépendantes et sur la minimisation d'un critère d'erreur quadratique. Cette approche s'avère très efficace, robuste et précise, mais fournit des modèles rationnels généralement à paramètres complexes, ne pouvant donc pas être utilisés pour la modélisation de systèmes réels. Nous avons ensuite présenté une approche de réduction d'ordre basée sur l'approximation par les fonctions réelles de Kautz (algorithme

KOR). Elle utilise les mêmes opérateurs de base que l'algorithme MLOR mais combinés différemment pour générer des fonctions de transfert rationnelles à paramètres réels. Dans ce chapitre les méthodes ont été évaluées et de nombreux exemples simples ont été traités. L'impact du nombre de coefficients du spectre et du choix des paramètres initiaux des fonctions de Müntz-Laguerre et de Kautz ont également été évalués. Nous avons constaté que leur choix influe essentiellement sur la rapidité de convergence de l'algorithme mais très peu sur la qualité du modèle réduit obtenu. Nous avons par ailleurs comparé les résultats obtenus par notre nouvel algorithme de réduction à ceux obtenus par des méthodes connues. Les modèles obtenus par notre méthode présentent des erreurs quadratiques très proches de celles obtenues par des méthodes optimales, nous permettant ainsi de valider notre approche.

Le chapitre 4 a été consacré à l'application de l'outil développé à des réseaux d'interconnexions, de nombreux exemples ont ainsi été traités. La méthode développée s'applique avec succès à de nombreux problèmes pratiques, dans le domaine des systèmes multi-entrées, multi-sorties. Le problème de la modélisation d'un système dont le comportement est uniquement connu en certains points en fréquence et provenant de simulations électromagnétiques a été aussi considéré dans ce chapitre. Enfin, pour de nombreuses applications, la solution obtenue est suffisamment précise. La méthode converge rapidement vers la solution. Vu les résultats encourageants obtenus, nous pensons que des recherches pourraient être poursuivies dans cette direction avec d'intéressantes perspectives.

Perspectives

L'objectif initial de notre travail a été atteint : partant de modèles physiques et de descriptions électromagnétiques, notre méthode conduit à des modèles réduits de très bonne qualité. Divers points mériteraient d'être approfondis ou améliorés :

- Une étude statistique justifiant la stabilité des modèles réduits obtenus par la méthode MLOR a été effectuée durant la thèse, néanmoins il serait intéressant de pouvoir le démontrer analytiquement.
- Concernant la méthode de réduction présentée dans ce document, nous n'avons pas cherché à mettre en place une procédure automatique pour fixer les différents paramètres de réglages (choix des paramètres initiaux, de l'ordre de réduction et du facteur d'échelle). Il serait possible de mettre en place une stratégie de choix automatique pour régler ces paramètres.
- Pour la modélisation des systèmes de très grandes dimensions (beaucoup d'entrées/sorties), des procédures classiques existent. Elles consistent à subdiviser le système en sous-systèmes de dimensions raisonnables. Ceux-ci sont alors modélisés séparément. Des stratégies pourraient alors être développées pour une subdivision optimale [Gri06].

- A partir de nos modèles réduits nous avons la possibilité de générer des circuits équivalents de faible complexité. Pour générer un circuit équivalent, il est très important que le modèle soit passif. Cela nécessite donc une vérification de la passivité du modèle réduit. La passivité est une caractéristique importante des systèmes et il est souvent souhaitable de la conserver suite à une opération de réduction d'ordre. Plusieurs méthodes de passivation sont actuellement disponibles. La solution proposée par [Coe04] garantit la passivité du modèle dans tout le domaine fréquentiel. D'autres travaux, [Gus01] [Gus07] propose une approche moins coûteuse en temps de calcul mais qui n'assure la passivité qu'en certains points en fréquence, alors que d'autres [Gri04] s'orientent vers une passivation sur tout un intervalle de fréquences. Une fois le système rendu passif, il peut être représenté par un circuit RLCC physiquement réalisable et intégrable dans les simulateurs classiques.
- Les futures interconnexions (nanofils, nanotubes, optique,...), pourraient apporter une solution aux problèmes des parasites, en évitant au maximum les interconnexions dissipatives. Il serait donc intéressant de développer de nouveaux outils adaptés, qui nécessiteront de nouvelles avancées dans la modélisation et la prise en compte des paramètres physiques (dimension, température, ...).

Enfin, ces points résolus et complétés, le modèle réduit obtenu, devrait alors naturellement trouver sa place dans un flot de conception industriel.

Production scientifique

Publications

Mihai Telescu, Nadia Iassamen, Pascale Cloastre, Noël Tanguy, A simple algorithm for stable order reduction of z-domain Laguerre models, Signal Processing 13, 2013.

Communications

Iassamen N., Telescu M., Bréhonnet P., Tanguy N. Rational modeling of interconnect networks using multi-parameter Kautz functions. Dans PRIME 2010 - 6th IEEE Conference on Ph.D. Research in Microelectronics and Electronics, PRIME 2010, Allemagne, juillet 2010.

« Un prix de bronze a été obtenu lors de la présentation de cette article à IEEE PRIME en juillet 2010 (6th IEEE Conference on Ph.D. Research in Microelectronics and Electronics, PRIME 2010, Berlin : Allemagne 2010) ».

Lorival J.-E., Iassamen N., Telescu M., Cloastre P., Le Gouguec T., Tanguy N. ELSID : un outil logiciel pour la modélisation et la caractérisation des réseaux d'interconnexion des circuits VLSI GDR SoC-SiP 2010, France, juin 2010.

Iassamen N., Telescu M., Brehonnet P., Tanguy N., Outils d'identification et de modélisation des réseaux d'interconnexions pour une simulation temporelle rapide, 3ème Colloque National du GDR SOC-SIP, Paris (ORSAY), France, juin 2009.

Références bibliographiques

- [Amg04] Amghayrir A., Brehonnet P., Tanguy N., Vilbé P., Calvez L.C., Huret F., A Frequency Domain Approach for Efficient Model Reduction of Mixed VLSI Circuits, 8th IEEE Workshop on Signal Propagation On Interconnects, Heidelberg, Germany, 8-11 May 2004.
- [Amg05] Amghayrir A, Tanguy N., Bréhonnet P., Vilbé P., Calvez L.C., Laguerre-Gram Reduced-Order Modeling, IEEE Transactions on Automatic Control, IEEE Trans Automat. Contr., Vol 50, n° 9, pp. 1432-1435, September 2005.
- [Arn51] Arnoldi W. E., "The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenvalue problem," Quarterly of Applied Mathematics, volume 9, pages 17–25, 1951.
- [Bel51] “Bell System Memorial- Bell Labs History of The (the "crystal Triode")”, 1951 http://www.porticus.org/bell/belllabs_transistor.html.
- [Ben05] Benner P., Volker M., Sorensen D. C., "Dimension Reduction of Large-Scale Systems", Springer 2005
- [Bre93] Bréhonnet P., Modélisation et réduction de systèmes à temps discrets via une matrice de Gram, Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 1993.
- [Che05] Guoqing Chen and Eby G. Friedman, “An RLC Interconnect Model Based on Fourier Analysis”, IEEE Transactions on computer-aided design of integrated circuits and systems, vol. 24, n° 2, February 2005.
- [Chu05] Chul-Min Bae and Jong-Il Bae, System identification using generalized orthonormal basis, Proc. of SPIE, Systems Control, vol. 6052, 60520S, 2005.
- [Cla94] R.P.Clayton, "Analysis of Multiconductor transmission Lines", Wiley Series in Microwave and Optical Engineering, Kai Chang Series Editor, 1994.
- [Coe04] Coelho C.P., Phillips J., Silveira L. M., “A Convex Programming Approach for Generating Guaranteed Passive Approximations to Tabulated Frequency-Data” IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems vol. 23, no. 2, February 2004.
- [Dan04] Daniel L., Siong O. C., Chay L. S., Lee K. H., White J., "A Multiparameter Moment-Matching Model-Reduction Approach for Generating Geometrically Parameterized Interconnect Performance Models", IEEE Transactions on

- Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, vol. 23, pp. 678-693, 2004
- [Der94] Derrien A., Nouet C., Vilbé P., Calvez L.C., "Orthogonal sets for efficient model-order reduction via a Gauss-Newton method", Electronics Letters, vol. 30, n°7, Mar. 1994, pp.544-545.
- [Des04] Dirk Deschrijver, Tom Dhaene. " Fast Passivity Enforcement Technique for Common-Pole S-Parameter Multiport Systems." Signal Propagation on Interconnects, SPI '09. IEEE , 2009.
- [Deu97] A. Deutsch et al. When are Transmission-Line Effects Important for On-Chip Interconnections? In IEEE Electronic Components and Technology Conference, 1997.
- [Dia98] Diaz E.M., Fischer B.R., Medvedev A., "Identification of a vibration process by means of Kautz functions", Proceedings of the Fourth International Conference on Vibration Control (MOVIC'98), Zürich, Switzerland, Aug. 1998, pp. 387–392.
- [Fen05] Feng L., "Parameter independent model order reduction", Mathematics and Computers in Simulation, vol. 68, n° 3, 2005, pp 221-234.
- [Fou06] Ludovic Fourneaud, Caractérisation et modélisation des performances hautes fréquences des réseaux d'interconnexions de circuits avancés 3D : Application à la réalisation d'imageurs de nouvelle génération, Thèse de Doctorat, Université de GRENOBLE, 2006.
- [Fos24] R.M. Foster, "A reactance theorem", The Bell System Technical Journal, Apr. 1924.
- [Gri04] Grivet-Talocia S., Passivity Enforcement via Perturbation of Hamiltonian Matrices, IEEE Trans. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, pp. 1755-1769, vol. 51, n. 9, September, 2004
- [Gus99] Gustavsen B., Semlyen A., "Rational approximation of frequency responses by vector fitting", IEEE Trans on Power Del., vol. 14, n°3, Jul. 1999, pp. 1052-1061.
- [Gus06] Gustavsen B., Relaxed Vector Fitting Algorithm for Rational Approximation of Frequency Domain Responses", 10th IEEE Workshop on Signal Propagation On Interconnects, Berlin, Germany, 9-12 May 2006.
- [Heu05] P.S.C. Heuberger, P.M.J. van den Hof, B. Wahlberg, Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions, Springer-Verlag, 2005.

- [Hsu90] Hsu C., Hou D., "Linear approximation of fractional transfer functions of distributed parameter systems", *Electronics Letters*, vol. 26, n°15, Juin. 1990, pp. 1211-1213.

- [Hyl85] Hyland. D. C, Bernstein. D. S, The optimal projection equations for model reduction and the relationships among the methods of Wilson, Skelton and Moore," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-30, pp 1201–1211, 1985.

- [Ias09] Iassamen N., Telescu M., Brehonnet P., Tanguy N., Outils d'identification et de modélisation des réseaux d'interconnexions pour une simulation temporelle rapide, 3ème Colloque National du GDR SOC-SIP, Paris (ORSAY), France, juin 2009.

- [Ias10] Iassamen N., Telescu M., Bréhonnet P., Tanguy N. Rational modeling of interconnect networks using multi-parameter Kautz functions. Dans *PRIME 2010-6th IEEE Conference on Ph.D. Research in Microelectronics and Electronics*, PRIME 2010, Allemagne, juillet 2010.

- [ITRS] International Technology Roadmap for Semiconductors (ITRS), 2001 – 2007

- [Jal07] Jalel Ghabi, Ali Douik and Hassani Messaoud, "A New Modeling Approach of MIMO linear Systems using the generalized Orthonormal basis functions", *Proceedings of the 6th WSEAS International Conference on Signal Processing, Robotics and Automation*, Corfu Island, Greece, February 16-19, 2007.

- [Joh70] Johnson S.P., Huelsman L.P., "A High-Q distributed-lumped-active network configurations with zero real-part pole sensitivity", *Proc. IEEE*, vol. 58, 1970, pp. 491-492.

- [Kau52] Kautz W. H., "Network synthesis for specified transient response", Technical report, n°209, M.I.T. Research Lab., Electronics, 1952.

- [Kau54] Kautz W.H., "Transient synthesis in the time domain", *IRE Trans. Circuit Theory*, vol. 1, pp. 29-39, 1954. Il me manque

- [Kno00] Knockaert L., De Zutter D., "Laguerre-SVD reduced-order modeling", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 48, n° 9, Sept. 2000, pp. 1469-1475.

- [Kno01] Knockaert L., "On orthonormal Müntz-Laguerre filters", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, n° 4, Apr. 2001, pp. 790-793.

- [Kno03] L. Knockaert, D. De Zutter, "Stable Laguerre-SVD Reduced order Modeling", IEEE Trans. on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, Vol. 50, No 4, April 2003.
- [Kno06] Knockaert L., Dhaene T., "Orthonormal bandlimited Kautz sequences for global system modeling from piecewise rational models", IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, vol. 25, n° 7, Jul. 2006, pp. 1377-1382.
- [Lep91] A. Lepschy, G. A. Mian, G. Pinato, and U. Viaro, "Rational L2 approximation: A nongradient algorithm," in Proc. IEEE Conf. Decision and Control, 1991.
- [Liu05] Liu P., Qi Z., Tan S.X.D., "Passive hierarchical model-order reduction and realization of RLCM circuits", 6th International symposium on quality of Electronic design, ISQED, 2005.
- [Lor10] Lorival J.-E., Iassamen N., Telescu M., Cloastre P., Le Gouguec T., Tanguy N. ELSID : un outil logiciel pour la modélisation et la caractérisation des réseaux d'interconnexion des circuits VLSI GDR SoC-SiP 2010, France, juin 2010.
- [Mal98] R. Malti , D. Maquin, and J. Ragot. Optimality conditions for the truncated network of the discrete generalized orthonormal basis having real poles. In 37th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). Tampa Fl USA, December 1998.
- [Mal99] R. Malti , D. Maquin, and J. Ragot. Optimum generalized orthonormal basis networks for a class of discrete-time systems. In 14th IFAC World Congress. Beijing China, July 1999.
- [Moo81] Moore, B. C. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction. IEEE Trans. Automat. Contr. 26 (1), 1981.
- [Moo65] Gordon E. Moore, Cramming more components onto integrated circuits, 1965.
- [Mor00] Morvan R., Modélisation de Circuits et Systèmes de Dimension Infinie, Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 2000.
- [Nou93] Nouët C., Réduction de l'ordre des systèmes continus linéaires via un processus d'orthogonalisation et un algorithme de Gauss-Newton, Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 1994.
- [Oda98] Odabasioglu A., Celik M., "PRIMA : Passive Reduced-Order Interconnect Macromodeling Algorithm" IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated circuits and systems Vol. 17, n° 8, August 1998.

- [Orq97] Orqueda O.A.A., Jordan M.A., "Adaptive control of unstable systems based on Kautz expanded inverse model", 1st International Conference on Control of Oscillations and Chaos, vol. 3, 27-29 Aug. 1997, pp. 549–552.
- [Paa03] Paatero T., "Efficient pole-zero modelling of resonant system using complex warping and Kautz filter techniques", IEEE Workshop an Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, New Palm, NY, Oct. 19-22, 2003, pp. 9-12.
- [Que06] Queré Y., Contribution à l'indentification et à la modélisation, sur une large bande de fréquences, des phénomènes électromagnétiques induits par le réseau d'interconnexions de circuits numériques avancés, Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 2006.
- [Sev93] Sevellec M., Réduction de l'ordre des systèmes à fonctions de transfert rationnel, Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 1993.
- [Sim05] Simeoni M., Vandenbosch G.A.E., Lager I.E., "Model-order reduction techniques for linear electromagnetic problems - an overview", 35th European Microwave Conference, Paris, France, October 4-6, 2005.
- [Spa92] J.T. Spanos, M.H. Milman, and D.L. Mingori, A new algorithm for L2 optimal model reduction, *Automatica*, 28: 897-909 (1992).
- [Ste04] Stefano Grivet-Talocia. " Passivity Enforcement via Perturbation of Hamiltonian Matrices." *IEEE Trans. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Application*, pp. 1755-1769, vol. 51, n° 9, September, 2004.
- [Ste07] Stefano Grivet-Talocia. " Passivity Enforcement With Relative Error Control." *IEEE Trans. On Microwave Theory And Techniques*, Vol. 55, n° 11, Nivember 2007.
- [Tan94] Tanguy N., La transformation de Laguerre discret, Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 1994.
- [Tan99] K. T. Tang and E. G. Friedman. Interconnect coupling noise in CMOS VLSI circuits. In *ISPD '99 Monterey*, 1999.
- [Tan05] Tanguy N., Brehonnet P., Vilbé P., Calvez L.C, Gram matrix of a Laguerre model: application to model reduction of irrational transfer function, *Signal Processing*, vol. 85, n° 3, pp. 651-655, March 2005

- [Tel07] Telescu M., Modélisation d'ordre réduit des interconnexions de circuits VLSI, Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 2007.
- [Vla11] Vladimirovna Ugryumova M., Applications of Model Order Reduction for IC Modeling, phd Thesis, geboren te Novosibirsk, Rusland, April 2011
- [Van95] Van den Hof, P. M. J., Heuberger, P. S. C., and Bokor, J., System identification with generalized orthonormal basis functions, *Automatica*, 31, pp. 1821-1834, 1995.
- [Vil99] Vilbé P., Azou S., Bréhonnet P., Calvez L.C. The L2-optimal time delay rational Laplace model revisited, *IEEE Transactions CAS-I*, Vol. 46, N° 4, pp. 505-512, April 1999.
- [Wei99] Weile D. S., Michielssen E., Grimme E., Gallivan K., "A method for generating rational interpolant reduced order models of two-parameter linear systems", *Applied Mathematics Letters*", vol. 12, 1999, pp. 93-102.
- [Wei99] Wei-Yong Yan, James Lam, Senior Member, An Approximate Approach to H2 Optimal Model Reduction, *IEEE Transactions On Automatic Control*, Vol. 44, No. 7, July 1999.
- [Wil97] D. F. Williams, "Multiconductor Transmission Line Characterization," *IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology-Part B*, vol. 20, no. 2, pp. 129-132, May 1997.
- [Zha01] D. Zhang, M. J. Kushner. "Investigation of surface reactions during C2F6 plasma etching of SiO2 with equipment and feature scale models." *J. Vac. Sci. Technol. A* 19.2 (2001): 524-538.

Annexes

Annexe A Conservation des R premiers coefficients

Pour montrer que $\hat{h}(s)$, obtenu par la procédure de réduction d'ordre présentée dans la section III.3 avec $\vec{\alpha} = \{\alpha_1; \dots; \alpha_R\}$, conserve les R premiers coefficients du spectre de Müntz-Laguerre de $\hat{f}(s)$ (également calculé pour $\vec{\alpha} = \{\alpha_1; \dots; \alpha_R\}$), nous cherchons à exprimer l'égalité entre $\hat{h}(\alpha_\lambda^*)$ et $\hat{f}(\alpha_\lambda^*)$.

Nous avons montré dans (III.20) que $\sqrt{2\Re\{\alpha_k\}} \hat{f}_{k-1}(\alpha_k^*) = c_k^0$. Nous rappelons l'expression de $y_k(s)$ donnée dans (III.16), à savoir

$$y_k(s) = \frac{\alpha_k + \alpha_k^*}{s - \alpha_k^*} \hat{f}_{k-1}(\alpha_k^*).$$

En remplaçant (III.20) par son expression dans (III.16) nous retrouvons

$$\hat{y}_k(s) = \frac{\sqrt{2\Re\{\alpha_k\}}}{s - \alpha_k^*} c_k^0 = \frac{\sqrt{2\Re\{\alpha_k\}}}{s + \alpha_k} \frac{s + \alpha_k}{s - \alpha_k^*} c_k^0 = \phi_k(s) z_k(s) c_k^0.$$

Cela implique que

$$\hat{y}_k(s) \prod_{l=n+1}^k z_l(s) = c_n \phi_n(s) z_n(s) \prod_{l=1}^k z_l(s) \prod_{l=1}^n z_l^{-1}(s).$$

On obtient alors la relation

$$\sum_{n=1}^k \hat{y}_n(s) \prod_{l=n+1}^k z_l(s) = \sum_{n=1}^k c_n \phi_n(s) Z_k(s). \quad (\text{A.1})$$

Tenant compte de (A.1), l'expression du modèle réduit (III.24) peut alors se réécrire

$$\hat{h}(s) = \frac{\sum_{n=1}^R c_n \hat{\phi}_n(s) \sum_{k=n}^R q_k Z_k(s)}{\sum_{k=0}^R q_k Z_k(s)} \quad (\text{A.2})$$

Multiplions par $Z_R^{-1}(s)$ numérateur et dénominateur

$$\hat{h}(s) = \frac{\sum_{n=1}^R c_n \hat{\phi}_n(s) \sum_{k=n}^R q_k Z_k(s)}{\sum_{k=0}^R q_k Z_k(s)} \frac{Z_R^{-1}(s)}{Z_R^{-1}(s)}. \quad (\text{A.3})$$

Sachant que $Z_R^{-1}(s) = \prod_{l=1}^R z_l^{-1}(s)$ et $z_k^{-1}(s) = \frac{s - \alpha_k^*}{s + \alpha_k}$, on déduit que pour $\lambda \geq j+1$ et $j < \lambda$

nous avons $\prod_{l=k+1}^R z_l^{-1}(\alpha_\lambda^*) = 0$ et donc

$$\sum_{k=0}^R q_k \prod_{l=k+1}^R z_l^{-1}(\alpha_\lambda^*) = \sum_{k=\lambda}^R q_k \prod_{l=k+1}^R z_l^{-1}(\alpha_\lambda^*).$$

De plus si $n > \lambda$, on a $c_n \hat{\phi}_n(\alpha_\lambda^*) = 0$.

L'expression de $\hat{h}(\alpha_\lambda^*)$ s'écrit alors

$$\hat{h}(\alpha_\lambda^*) = \frac{\sum_{n=1}^{\lambda} c_n \hat{\phi}_n(\alpha_\lambda^*) \sum_{k=\lambda}^R q_j \prod_{l=k+1}^R z_l^{-1}(\alpha_\lambda^*)}{\sum_{k=\lambda}^R q_j \prod_{l=k+1}^R z_l^{-1}(\alpha_\lambda^*)}. \quad (\text{A.4})$$

Après simplification, nous obtenons la relation d'égalité entre $\hat{h}(\alpha_\lambda^*)$ et $\hat{f}(\alpha_\lambda^*)$.

$$\hat{h}(\alpha_\lambda^*) = \sum_{n=1}^{\lambda} c_n \hat{\phi}_n(\alpha_\lambda^*) = \hat{f}(\alpha_\lambda^*)$$

En conséquence le modèle réduit a les mêmes R premiers coefficients du spectre de Müntz-Laguerre que la fonction de transfert d'origine $\hat{f}(s)$ (on suppose que le modèle réduit et le spectre de Müntz-Laguerre sont calculés avec le même jeu de pôles $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_R\}$).

Annexe B **Calcul du spectre des fonctions $\hat{g}_k(s)$**

Nous cherchons à exprimer les spectres de Kautz des différentes fonctions de l'ensemble $\Pi_R = \{\hat{g}_0, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_R\}$ afin de déterminer aisément les divers produits scalaires $\langle g_k, g_l \rangle$. Les fonctions $\hat{g}_k(s)$ sont obtenues récursivement par l'application de combinaisons des opérateurs Λ_{α_k} (III.33). Pour déterminer les spectres de Kautz de ces fonctions $\hat{g}_k(s)$, il est nécessaire de connaître l'impact de l'applications des opérateurs Λ_{α_k} sur les fonctions de base. Considérons dans un premier temps une fonction quelconque d'énergie finie

$$\hat{g}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \hat{\psi}_n(s) \quad (\text{B.1})$$

avec $d_n = \langle g, \psi_n \rangle$ les coefficients de Kautz de la fonction $\hat{g}(s)$. L'application de l'opérateur Λ_{α_k} à $\hat{g}(s)$ conduit à appliquer cet opérateur Λ_{α_k} aux fonctions de Kautz,

$$\Lambda_{\alpha_k} \hat{g}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n [\Lambda_{\alpha_k} \hat{\psi}_n(s)], \quad (\text{B.2})$$

relation que l'on cherche à mettre sous la forme

$$\Lambda_{\alpha_k} \hat{g}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} d'_m \hat{\psi}_m(s). \quad (\text{B.3})$$

Les fonctions de Kautz étant orthonormées, on a $d'_m = \langle \Lambda_{\alpha_k} g, \psi_m \rangle$. En utilisant (B.1), nous pouvons déduire la relation entre les coefficients d'_m et les coefficients d_n

$$d'_m = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \langle \Lambda_{\alpha_k} \psi_n, \psi_m \rangle. \quad (\text{B.4})$$

On note $t_{n,m}^k = \langle \Lambda_{\alpha_k} \psi_n, \psi_m \rangle$, on a alors, d'après la définition de l'opérateur (III.15)

$$\begin{aligned}
t_{n,m}^k &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left(\frac{s + \alpha_k}{s - \alpha_k^*} \hat{\psi}_n(s) - \frac{\alpha_k + \alpha_k^*}{s - \alpha_k^*} \hat{\psi}_n(\alpha_k^*) \right) \hat{\psi}_m(-s) ds \\
&= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{s + \alpha_k}{s - \alpha_k^*} \hat{\psi}_n(s) \hat{\psi}_m(-s) ds.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Pour le calcul des $t_{n,m}^k$, il est nécessaire de distinguer les indices pairs et impairs

$$t_{2n-1, 2m-1}^k = \langle \Lambda_{\alpha_k} \hat{\psi}_{2n-1}, \hat{\psi}_{2m-1} \rangle$$

$$t_{2n-1, 2m}^k = \langle \Lambda_{\alpha_k} \hat{\psi}_{2n-1}, \hat{\psi}_{2m} \rangle$$

$$t_{2n, 2m-1}^k = \langle \Lambda_{\alpha_k} \hat{\psi}_{2n}, \hat{\psi}_{2m-1} \rangle$$

$$t_{2n, 2m}^k = \langle \Lambda_{\alpha_k} \hat{\psi}_{2n}, \hat{\psi}_{2m} \rangle$$

D'après la définition des fonctions de Kautz (II.5) où l'on pose

$$D_n(s) = s^2 + \sigma_n s + \pi_n = (s + \alpha_{2n-1})(s + \alpha_{2n}),$$

puis en simplifiant les zéros et les pôles identiques, à l'aide du théorème des résidus on déduit que :

$$\text{- pour } m > n \quad t_{2n-1, 2m-1}^k = t_{2n-1, 2m}^k = t_{2n, 2m-1}^k = t_{2n, 2m}^k = 0$$

- pour $m = n$

$$t_{2n-1, 2m-1}^k = \frac{\sigma_n - \alpha_k \alpha_k^* - \alpha_k \pi_n}{D_n(\alpha_k^*)} = -1 + \frac{2\pi_n}{D_n(\alpha_k^*)}$$

$$t_{2n-1, 2m}^k = \frac{-(\alpha_k + \alpha_k^*)\sqrt{\sigma_n}}{D_n(\alpha_k^*)} = -t_{2n, 2m-1}^k$$

$$t_{2n, 2m-1}^k = \frac{(\alpha_k + \alpha_k^*)\sqrt{\sigma_n}}{D_n(\alpha_k^*)}$$

$$t_{2n, 2m}^k = \frac{\sigma_n - \alpha_k \alpha_k^* + \alpha_k \pi_n}{D_n(\alpha_k^*)} = \frac{D_n(-\alpha_k^*) + 2\pi_n}{D_n(\alpha_k^*)}$$

- pour $m < n$

$$\begin{aligned}
t_{2n-1, 2m-1}^k &= \frac{-(\alpha_k + \alpha_k^*)\sqrt{2\sigma_m \pi_m} \sqrt{2\sigma_n \pi_n}}{D_m(\alpha_k^*) D_n(\alpha_k^*)} \prod_{l=m+1}^{n-1} \frac{D_l(-\alpha_k^*)}{D_l(\alpha_k^*)} \\
t_{2n, 2m-1}^k &= \frac{-(\alpha_k + \alpha_k^*)\alpha_k^* \sqrt{2\sigma_m \pi_m} \sqrt{2\sigma_n \pi_n}}{D_m(\alpha_k^*) D_n(\alpha_k^*)} \prod_{l=m+1}^{n-1} \frac{D_l(-\alpha_k^*)}{D_l(\alpha_k^*)} = \frac{\alpha_k^*}{\sqrt{\pi_n}} t_{2n-1, 2m-1}^k \\
t_{2n-1, 2m}^k &= \frac{(\alpha_k + \alpha_k^*)\alpha_k^* \sqrt{2\sigma_m \pi_m} \sqrt{2\sigma_n \pi_n}}{D_m(\alpha_k^*) D_n(\alpha_k^*)} \prod_{l=m+1}^{n-1} \frac{D_l(-\alpha_k^*)}{D_l(\alpha_k^*)} = \frac{-\alpha_k^*}{\sqrt{\pi_m}} t_{2n-1, 2m-1}^k
\end{aligned}$$

$$t_{2n,2m}^k = \frac{(\alpha_k + \alpha_k^*)(\alpha_k^*)^2 \sqrt{2\sigma_m} \sqrt{2\sigma_n}}{D_m(\alpha_k^*) D_n(\alpha_k^*)} \prod_{l=m+1}^{n-1} \frac{D_l(-\alpha_k^*)}{D_l(\alpha_k^*)} = \frac{-(\alpha_k^*)^2}{\sqrt{\pi_n \pi_m}} t_{2n-1,2m-1}^k$$

On obtient alors les relations entre les spectres de Kautz

$$\begin{aligned} d'_{2m-1} &= d_{2m-1} t_{2m-1,2m-1}^k + d_{2m} t_{2m,2m-1}^k + \sum_{n=m+1}^{m+R/2} [d_{2n-1} t_{2n-1,2m-1}^k + d_{2n} t_{2n,2m-1}^k] \\ d'_{2m} &= d_{2m-1} t_{2m-1,2m}^k + d_{2m} t_{2m,2m}^k + \sum_{n=m+1}^{m+R/2} [d_{2n-1} t_{2n-1,2m}^k + d_{2n} t_{2n,2m}^k] \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

A noter que pour $n > m + R/2$ les $t_{n,m}^k$ sont également nuls, $t_{2n-1,2m-1}^k = t_{2n-1,2m}^k = t_{2n,2m-1}^k = t_{2n,2m}^k = 0$. En effet pour $\alpha_k \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_R\}$, $D_l(-\alpha_k) = 0$ pour $k = 2l$ ou $k = 2l-1$, on a donc remplacé ∞ par $m + R/2$ dans les sommes $\sum_{n=1}^{m+R/2}$ de (B.7).

L'application de l'opérateur Λ_{α_k} conduit à la transformation des spectres donnée par les relations (B.6), relations qui peuvent s'exprimer sous la forme matricielle suivante (exemple d'une matrice (R+2)-bandes pour $R = 2$).

$$\begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1}^k & t_{2,1}^k & t_{3,1}^k & t_{4,1}^k & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & t_{2,2}^k & t_{3,2}^k & t_{4,2}^k & t_{5,2}^k & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & t_{3,3}^k & t_{4,3}^k & t_{5,3}^k & t_{6,3}^k & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & t_{4,4}^k & t_{5,4}^k & t_{6,4}^k & t_{7,4}^k & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{5,5}^k & t_{6,5}^k & t_{7,5}^k & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{6,6}^k & t_{7,6}^k & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{7,7}^k & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Chaque application d'un opérateur Λ_{α_k} conduit à une transformation du spectre de Kautz définie les relations B.6. Il sera alors aisé de calculer récursivement les spectres des différentes fonctions de l'ensemble $\Pi_R = \{\hat{g}_0, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_R\}$ et de calculer ensuite les produits scalaires entre ces fonctions. .

Annexe C Utilisation de ELSID

Un progiciel avec interface graphique, baptisé ELSID, acronyme pour «ELectrical System Identification», a été développé sous Matlab par notre équipe de recherche au Lab-STICC. ELSID est un outil d'identification et de modélisation d'ordre réduit des systèmes électriques linéaires.

La finalité du progiciel consiste en la génération de circuits passifs équivalents RLCG pouvant être intégrés dans différents logiciels de design et de simulation de circuits

électroniques, comme cadence, afin de diminuer les temps de simulation devenant de plus en plus importants avec l'évolution technologique.

Ce progiciel est actuellement à usage interne mais sera prochainement mis en ligne et accessible gratuitement à n'importe quel utilisateur.

Le progiciel est articulé autour de plusieurs points importants qui sont les suivants :

- L'utilisateur après chargement du fichier contenant la description du système configure avant lancement du progiciel les paramètres pour les processus d'identification et de réduction d'ordre du système ou opte pour un réglage automatique de ces paramètres. Il a la possibilité de sauvegarder puis de charger une configuration de simulation.
- Une fois les étapes d'identification et de réduction terminées, nous pouvons tracer les réponses fréquentielles (modules et phases) de chaque élément matriciel des systèmes réduits afin de les comparer à celles d'origine. Les résultats trouvés à chacune des étapes peuvent être sauvegardés dans un fichier.

Les systèmes, identifiés par ELSID à partir d'éléments matriciels H, G, S et Y, peuvent être issus de transformées de Laplace. Toutefois, l'utilisateur peut ne connaître leur comportement qu'à certaines fréquences. ELSID est donc capable d'identifier un système à partir de données fréquentielles (parties réelles et imaginaires, modules et phases). Les données en fréquence peuvent provenir de plusieurs types de fichiers : fichier txt, touchstone (pour des systèmes décrits sous des logiciels de simulation électrique (ADS) ou électromagnétique (HFSS)).

Pour finir, la complexité des modèles obtenus dépend du degré de précision souhaité par l'utilisateur. Pour faciliter l'utilisation du logiciel, il a été décidé que les paramètres intervenant dans les étapes d'identification et de réduction seraient paramétrables manuellement ou automatiquement.

Modélisation et Simulation des connexions intra et inter systèmes électroniques

Thèse de l'Université de Bretagne Occidentale, Spécialité Electronique
Année 2013

Résumé :

Les progrès constants en miniaturisation des transistors et l'augmentation des fréquences des signaux utilisés sont les principales tendances dans l'évolution des circuits électroniques. Avec ces évolutions apparaissent de nombreux effets indésirables qui perturbent le comportement des systèmes électroniques et sont soupçonnés d'être responsables de la majorité des dégradations de signaux dans les systèmes en haute fréquence. Des retards de propagation indésirables sont ainsi introduits par la présence des interconnexions, et la diaphonie, phénomène dû aux couplages entre lignes d'interconnexions, peut éventuellement provoquer des commutations non désirées des transistors. La prise en compte des interconnexions, dès les premières phases de conception d'un système, est par conséquent devenue une nécessité ces dernières années. Mais la simulation temporelle d'un réseau d'interconnexions est très gourmande en temps de calcul, ce qui impacte la durée globale de conception. Le remplacement des modèles électriques, décrivant précisément les interconnexions, par des modèles plus simples est primordial pour limiter les coûts de calcul. Une méthode de réduction d'ordre des modèles peut alors être employée pour effectuer cette opération efficacement. Le modèle final doit en effet décrire assez précisément certains aspects importants du modèle original et conserver les propriétés importantes du réseau d'interconnexions. Cette démarche permettra aux concepteurs d'effectuer des simulations temporelles rapides et d'étudier les paramètres d'intégrité du signal tel que le retard, le temps de montée, le dépassement....

L'objectif de cette thèse est d'établir un nouvel outil de réduction de complexité des modèles de réseaux d'interconnexions. Différentes descriptions initiales des systèmes d'interconnexions sont envisagées : modèles circuits (fonctions de transfert) ou mesures fréquentielles. L'approche développée repose sur l'utilisation des fonctions orthogonales de Müntz-Laguerre et de Kautz afin de décrire mathématiquement, de manière précise, le système d'origine. Un opérateur linéaire, lié à ces fonctions de base, est ensuite appliqué pour déterminer un modèle rationnel de moindre complexité. La technique proposée est comparée à d'autres méthodes de la littérature d'abord sur des exemples académiques. Tout le potentiel de la méthode est ensuite illustré par sa mise en œuvre sur des réseaux d'interconnexions.

Mots clés:

Réduction d'ordre des modèles, Modélisation comportementale, interconnexions, Fonctions orthogonales rationnelles.

Summary:

The ongoing progress in transistor miniaturization and a continuous frequency increase are the main trends in the present day evolution of electronic circuits. A number of undesired effects are intrinsic to these developments and are suspected to be responsible for most of the flawed signals present in high frequency systems. Parasitic delays are thus introduced by the presence of interconnect lines and crosstalk due to coupling may lead to undesired switching events in transistor circuits. Accounting for the presence of interconnect lines, at a very early stage in the design flow has become unavoidable in recent years. However, time domain simulations of massively coupled interconnect networks may be computationally costly and have a tremendous impact on the overall duration of the design process. Replacing complex, high order circuit models by more compact surrogates is thus necessary. Model order reduction is an effective way to derive such surrogates. The final model must mimic certain aspects of the original model with sufficient accuracy and preserve the interconnect network's most important properties. This approach enables designers to account for the undesired effects of interconnect lines such as, delays, rise-times and overshoots while maintaining the overall duration of time-domain simulations within acceptable limits.

The aim of this thesis is to create a new model order reduction tool applicable to complex interconnect networks. Different initial representations were considered – circuit models (transfer functions) or frequency domain measurements. The proposed approach uses orthogonal basis functions such as Müntz-Laguerre and Kautz to build an accurate mathematical representation of the original system. A linear operator, related to these functions, is subsequently used to derive a simplified model. The technique is first compared to other approaches using examples available in literature, its full potential being demonstrated on coupled interconnect models.

Keywords:

Model Order Reduction, Behavioral Modeling, Interconnects, Orthogonal Rational Functions.